

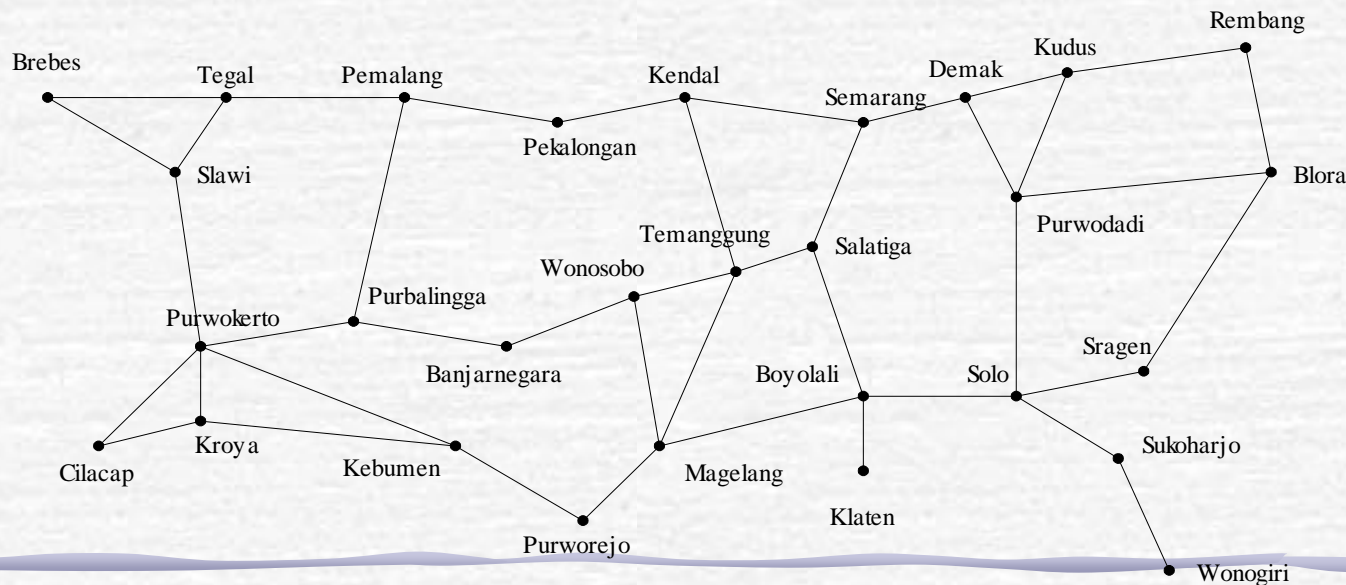


# Graf

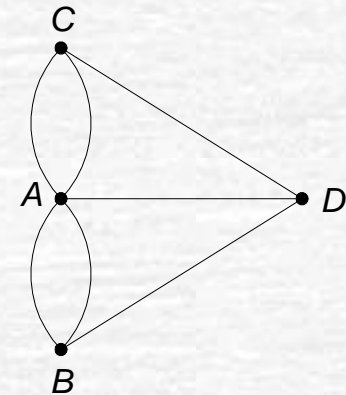
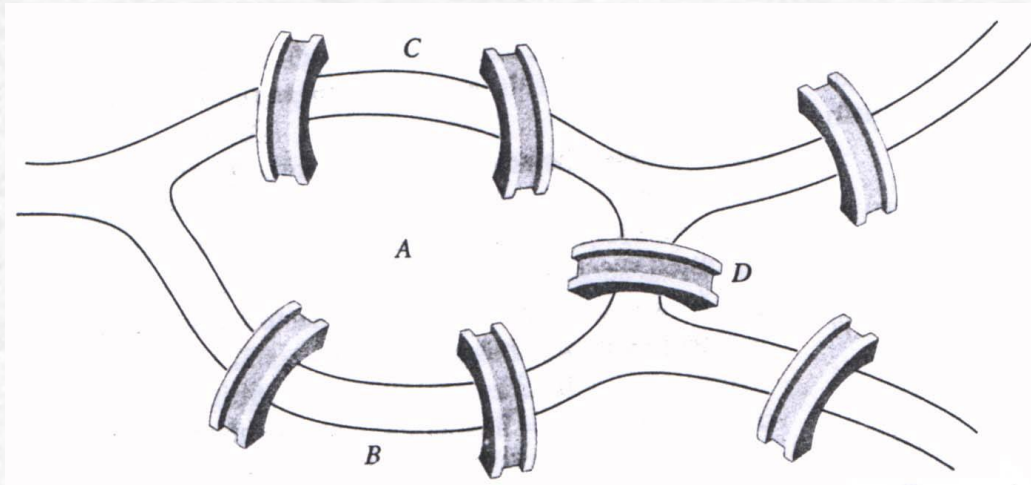
Bahan Kuliah  
IF2120 Matematika Diskrit

# Pendahuluan

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

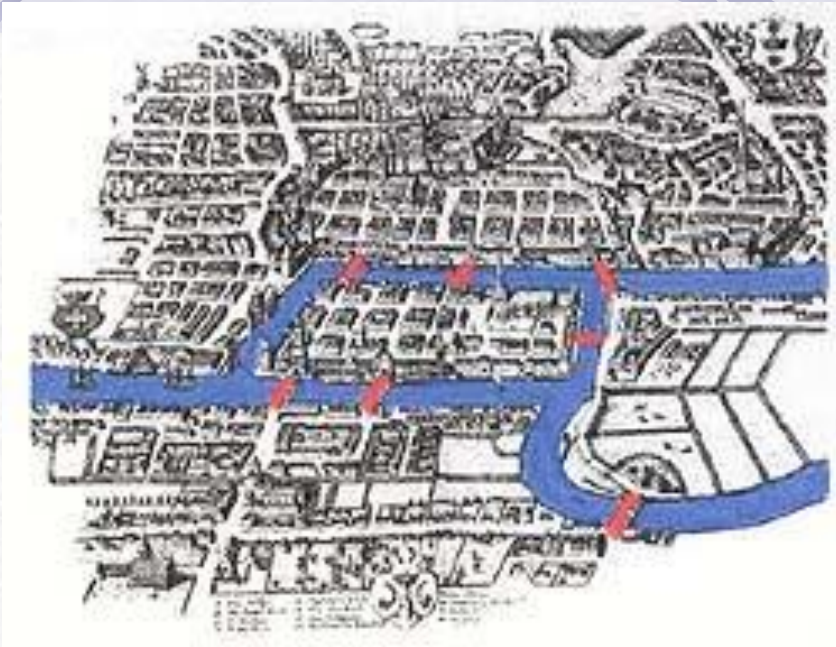


- Sejarah Graf: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)



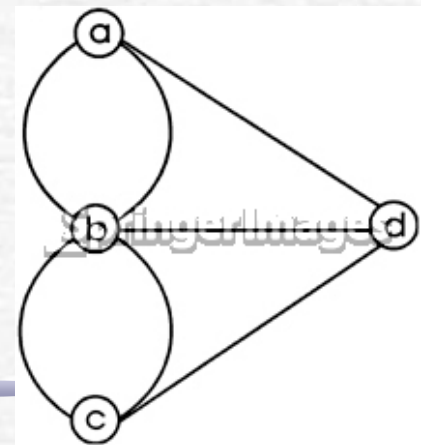
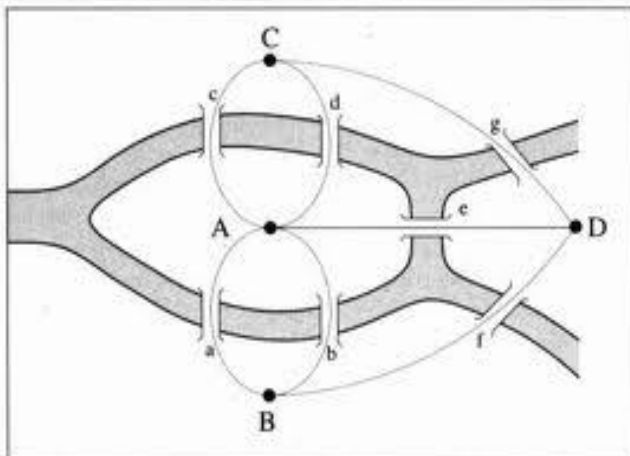
**Gambar 1.** Masalah Jembatan Königsberg

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:  
 Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan  
 Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?



## Konigsberg Bridge Problem

Leonhard Euler  
15 April 1707 – 18 September 1783





# Definisi Graf

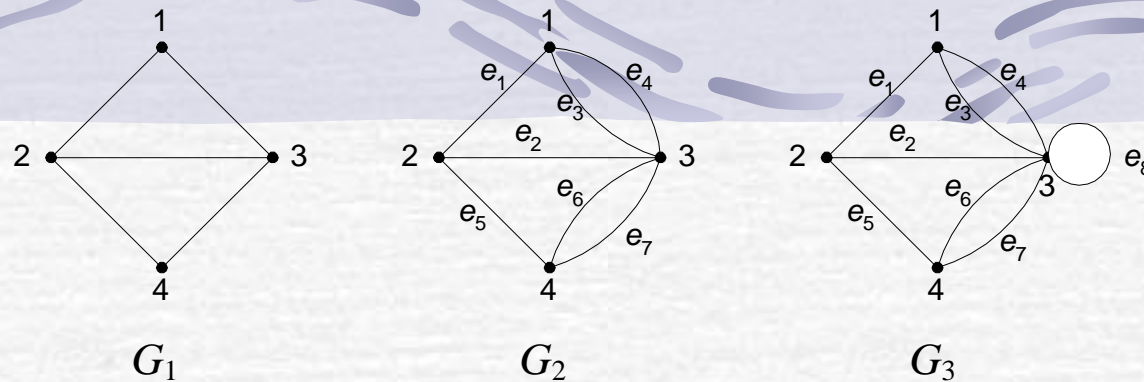
Graf  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini:

$V$  = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

$$= \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$$

$E$  = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$$= \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$$



**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

**Contoh 1.** Pada Gambar 2,  $G_1$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

$G_2$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$$

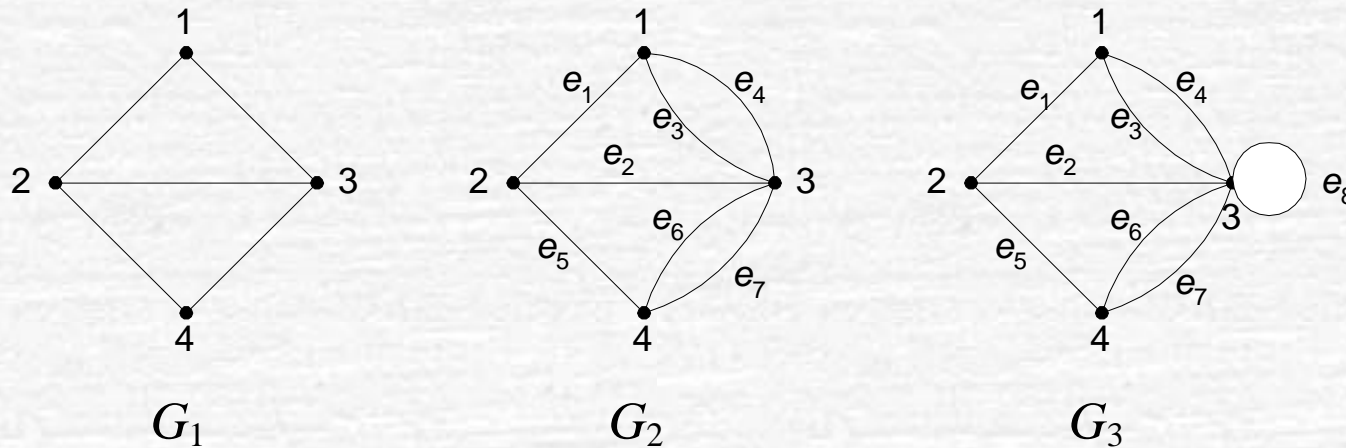
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

$G_3$  adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$$

$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$



**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada  $G_2$ , sisi  $e_3 = (1, 3)$  dan sisi  $e_4 = (1, 3)$  dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.
- Pada  $G_3$ , sisi  $e_8 = (3, 3)$  dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.



# Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

## 1. Graf sederhana (*simple graph*).

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.  $G_1$  pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana

## 2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*).

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).  $G_2$  dan  $G_3$  pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

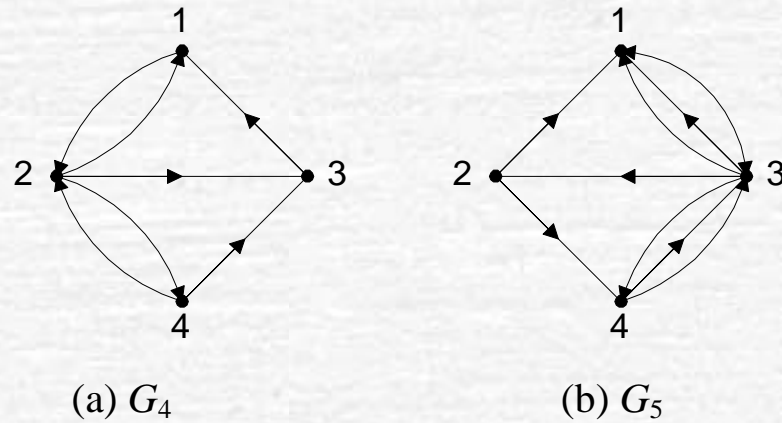
- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



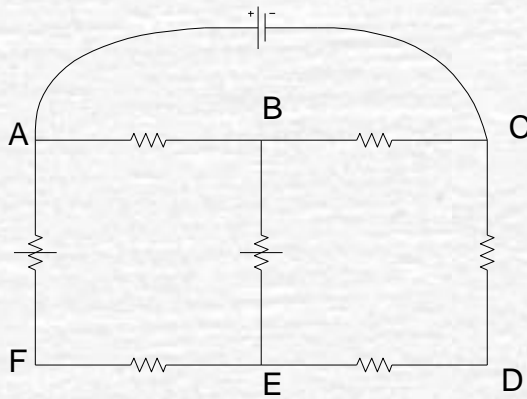
**Gambar 3** (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

**Tabel 1** Jenis-jenis graf [ROS99]

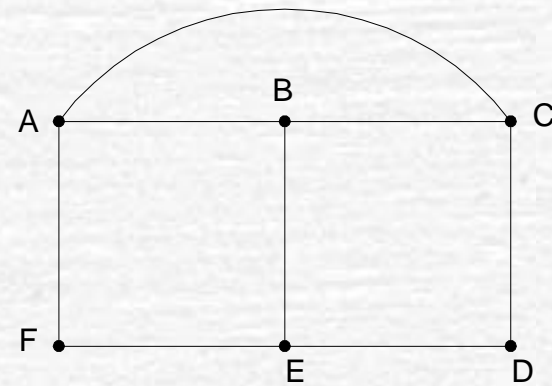
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

# Contoh Terapan Graf

## 1. Rangkaian listrik.



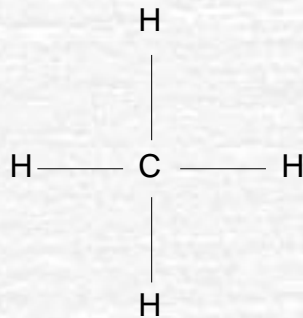
(a)



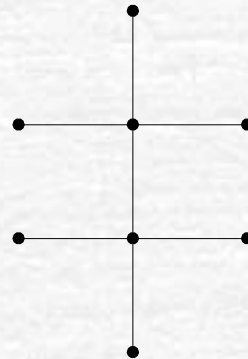
(b)

## 2. Isomer senyawa kimia karbon

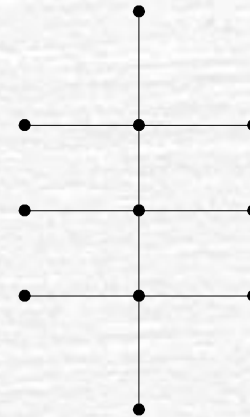
metana ( $\text{CH}_4$ )



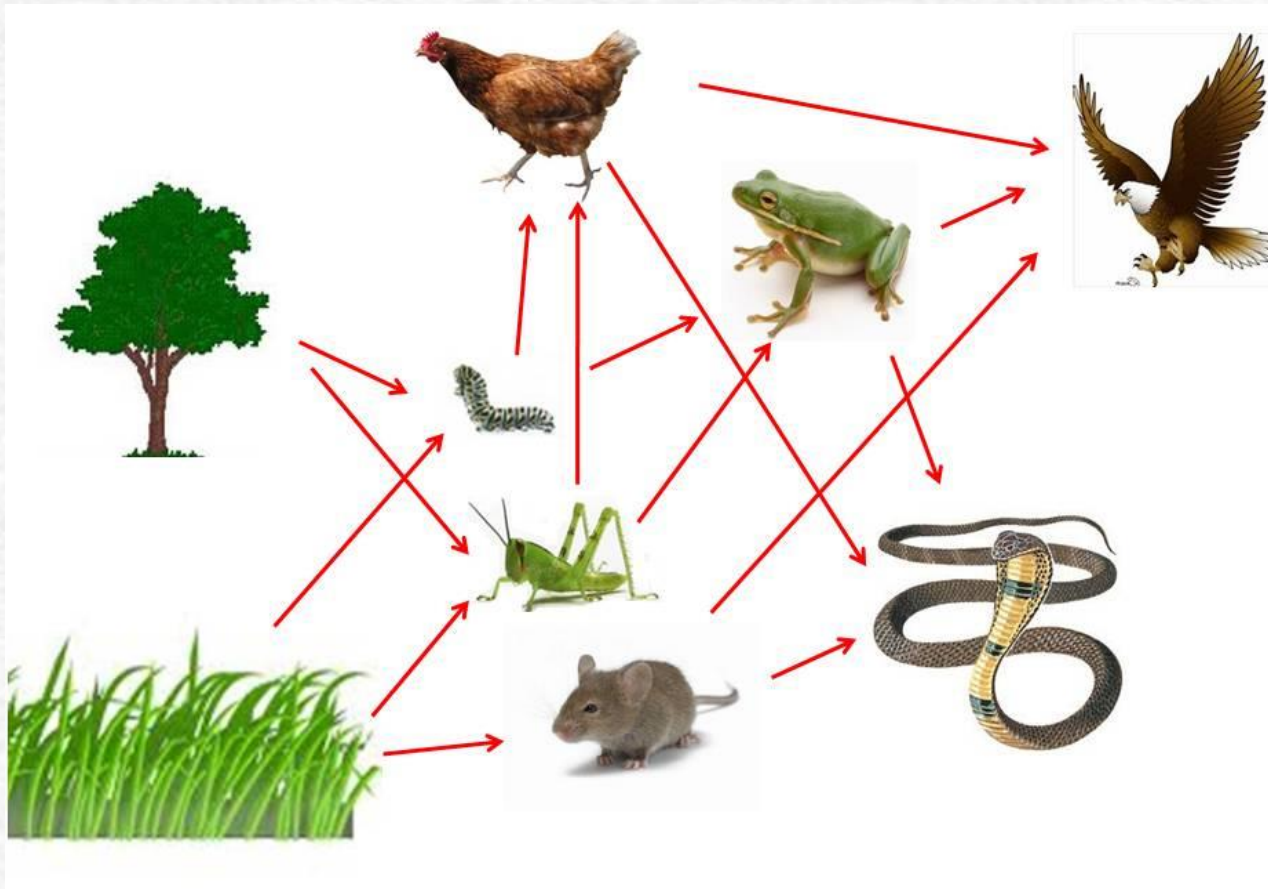
etana ( $\text{C}_2\text{H}_6$ )



propana ( $\text{C}_3\text{H}_8$ )



### 3. Jejaring makanan (Biologi)



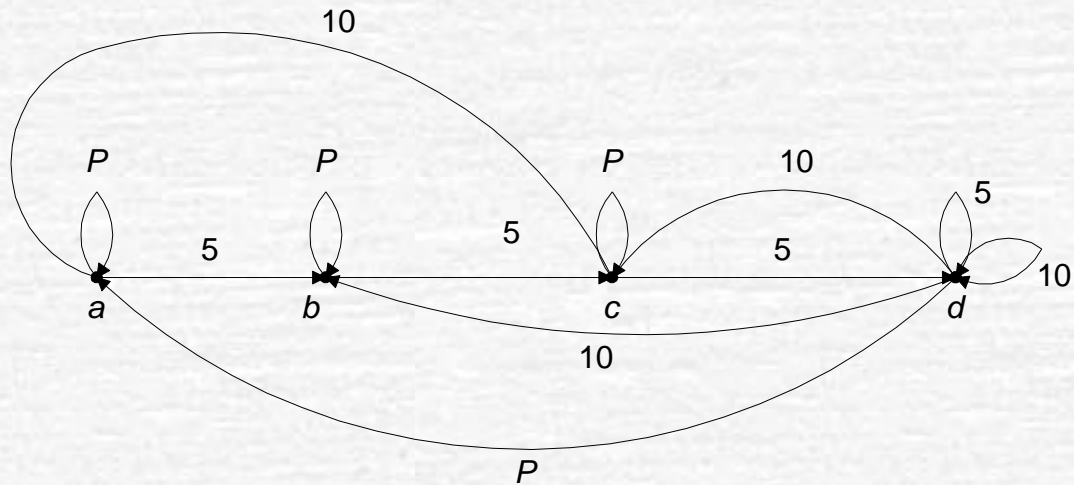




## 5. Pemodelan Mesin Jaja (*vending Machine*)



Graf kelakuan mesin jaja: (misal mesin jaja yang menjual coklat 15 sen)



Keterangan:

$a$  : 0 sen dimasukkan

$b$  : 5 sen dimasukkan

$c$  : 10 sen dimasukkan

$d$  : 15 sen atau lebih dimasukkan

# Latihan

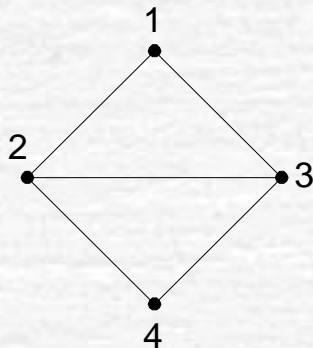
- Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan sistem  $\frac{1}{2}$  kompetisi (*round-robin tournaments*) yang diikuti oleh 5 tim.

# Terminologi Graf

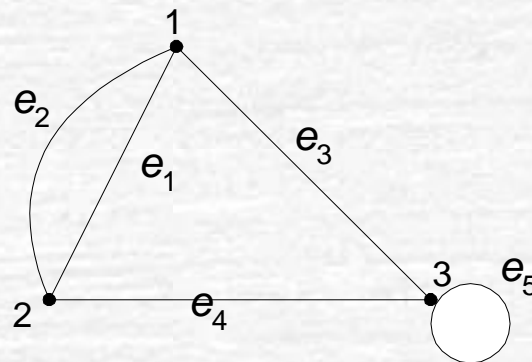
## 1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

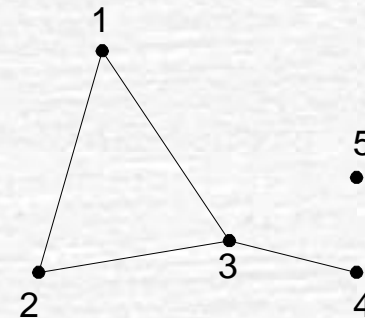
Tinjau graf  $G_1$  : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



$G_1$



$G_2$



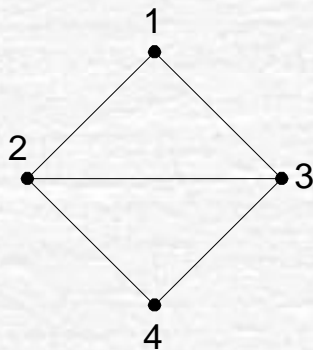
$G_3$

## 2. Bersisian (*Incidency*)

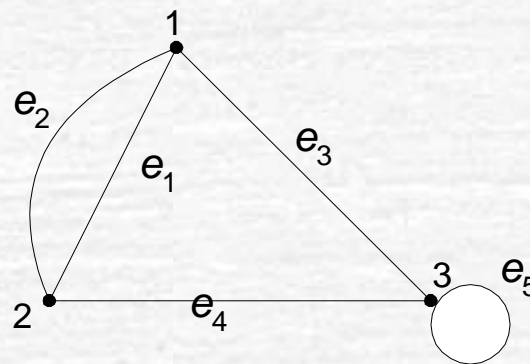
Untuk sembarang sisi  $e = (v_j, v_k)$  dikatakan

$e$  bersisian dengan simpul  $v_j$ , atau  
 $e$  bersisian dengan simpul  $v_k$

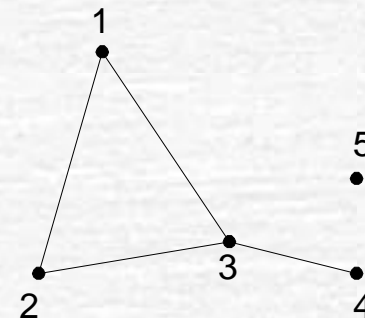
Tinjau graf  $G_1$ : sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,  
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,  
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.



$G_1$



$G_2$

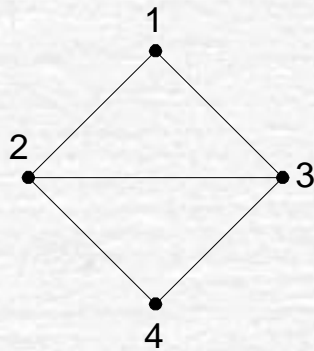


$G_3$

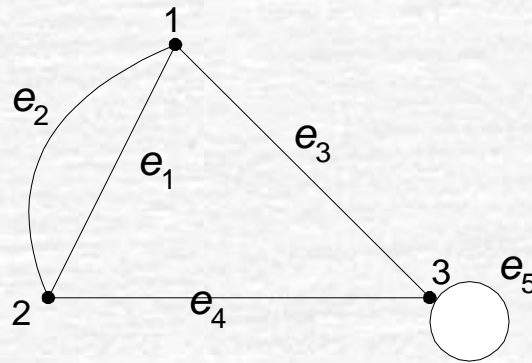
### 3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

*Simpul terpencil* ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

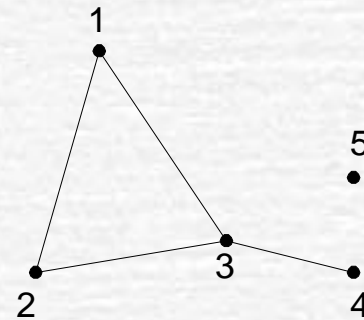
Tinjau graf  $G_3$ : simpul 5 adalah simpul terpencil.



$G_1$



$G_2$

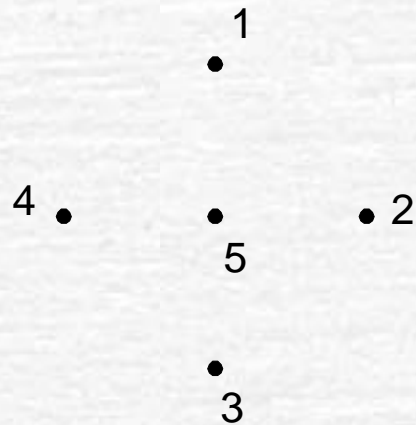


$G_3$

#### 4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong ( $N_n$ ).

Graf  $N_5$  :



## 5. Derajat (*Degree*)

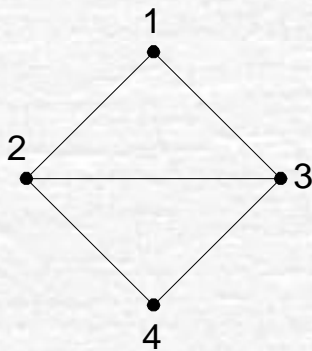
*Derajat* suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi:  $d(v)$

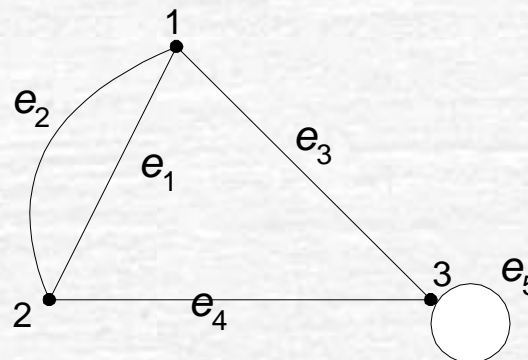
Tinjau graf  $G_1$ :  $d(1) = d(4) = 2$   
 $d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf  $G_3$ :  $d(5) = 0 \rightarrow$  simpul terpencil  
 $d(4) = 1 \rightarrow$  simpul anting-anting (*pendant vertex*)

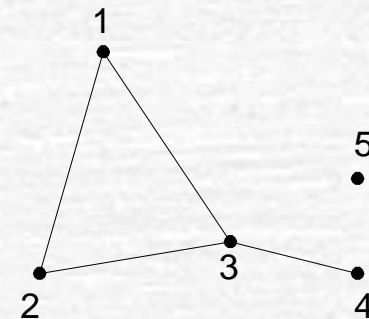
Tinjau graf  $G_2$ :  $d(1) = 3 \rightarrow$  bersisian dengan sisi ganda  
 $d(2) = 4 \rightarrow$  bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



$G_1$

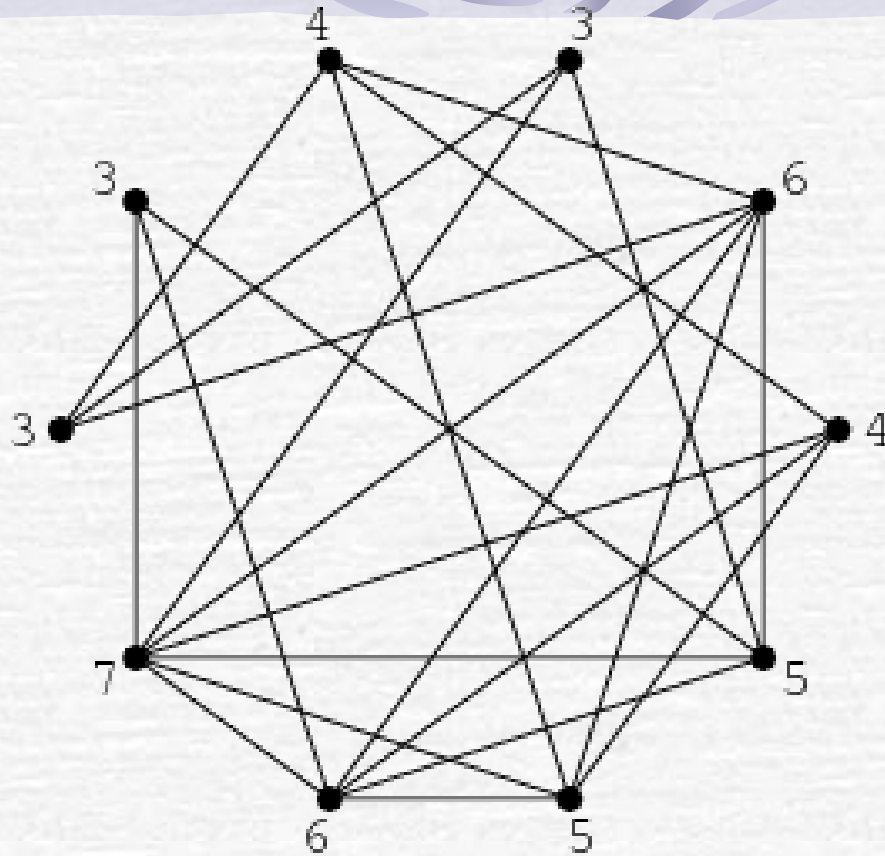


Rinaldi Murni / IF2120 Matematika  
Diskrit

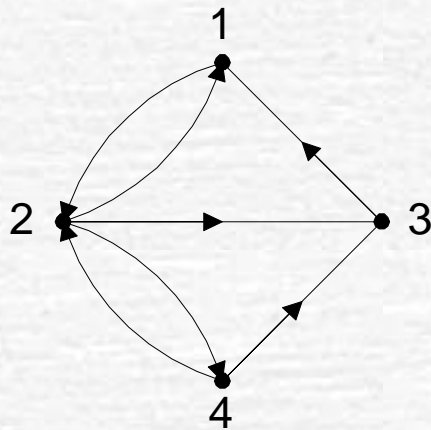


$G_3$

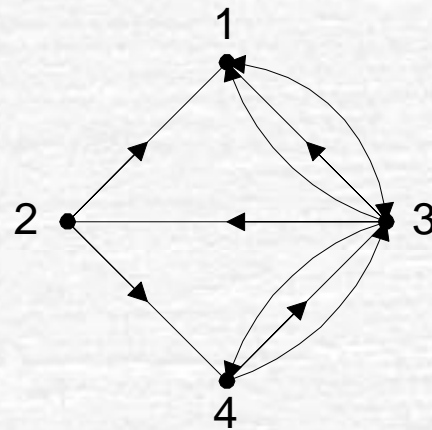




Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul



$G_4$



$G_5$

Tinjau graf  $G_4$ :

$$d_{\text{in}}(1) = 2; d_{\text{out}}(1) = 1$$

$$d_{\text{in}}(2) = 2; d_{\text{out}}(2) = 3$$

$$d_{\text{in}}(3) = 2; d_{\text{out}}(3) = 1$$

$$d_{\text{in}}(4) = 1; d_{\text{out}}(4) = 2$$

**Lemma Jabat Tangan.** Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

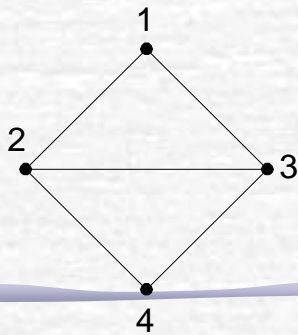
Dengan kata lain, jika  $G = (V, E)$ , maka  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



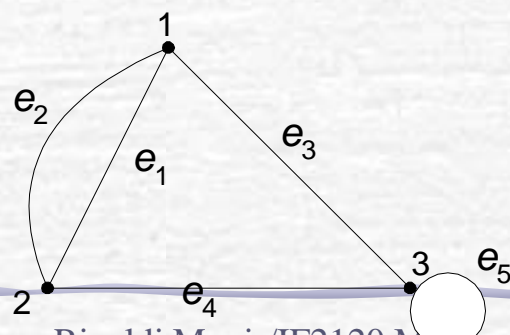
Tinjau graf  $G_1$ :  $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf  $G_2$ :  $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf  $G_3$ :  $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$   
 $= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$

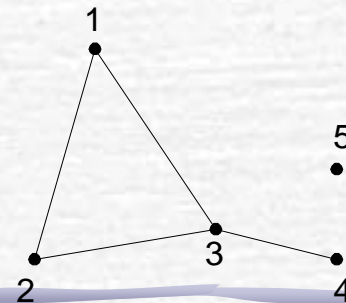


$G_1$



Rinaldi Munir/IF2120 Matematika

$G_2$  Diskrit



$G_3$

• Akibat dari *lemma (corollary)*:

**Teorema:** Untuk sembarang graf  $G$ , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

**Contoh 2.** Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

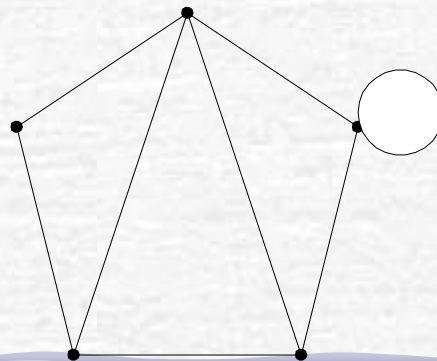
(a)  $2, 3, 1, 1, 2$

(b)  $2, 3, 3, 4, 4$

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil  
( $2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$ ).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap  
( $2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16$ ).



# Latihan

• Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 5, 2, 3, 2, 4

(b) 4, 4, 3, 2, 3

(c) 3, 3, 2, 3, 2

(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawaban:

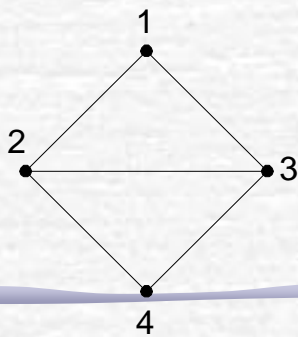
- (a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5
- (b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]
- (c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)
- (d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

## 6. Lintasan (*Path*)

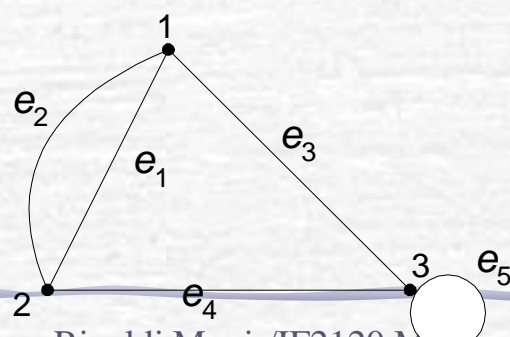
**Lintasan** yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf  $G$ .

Tinjau graf  $G_1$ : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

**Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada  $G_1$  memiliki panjang 3.

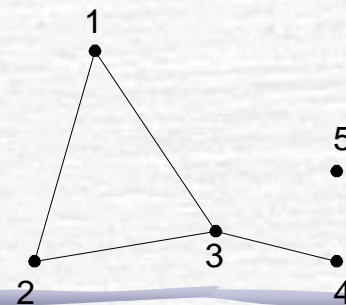


$G_1$



Rinaldi Munir/IF2120 Matematika

$G_2$  Diskrit



$G_3$

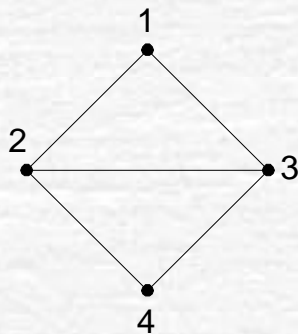


## 7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

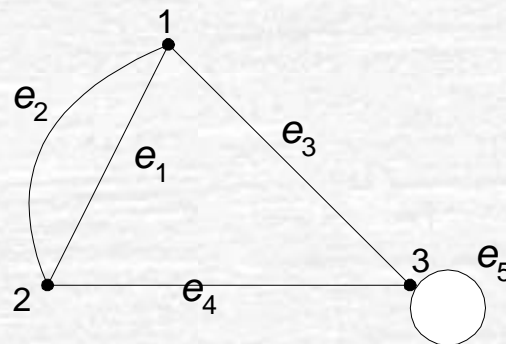
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf  $G_1$ : 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

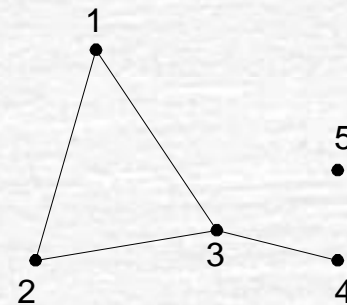
**Panjang sirkuit** adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada  $G_1$  memiliki panjang 3.



$G_1$



$G_2$



$G_3$

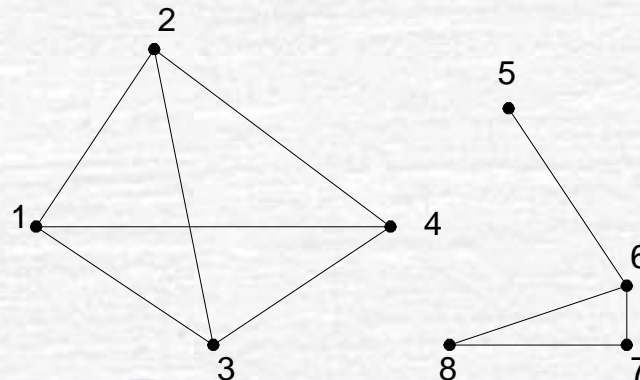
## 8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul  $v_1$  dan simpul  $v_2$  disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari  $v_1$  ke  $v_2$ .

$G$  disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul  $v_i$  dan  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ .

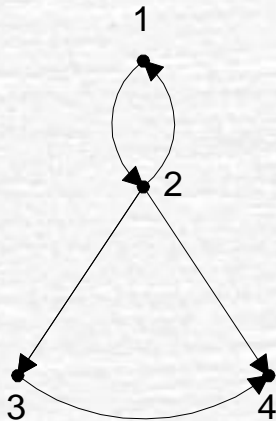
Jika tidak, maka  $G$  disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh graf tak-terhubung:

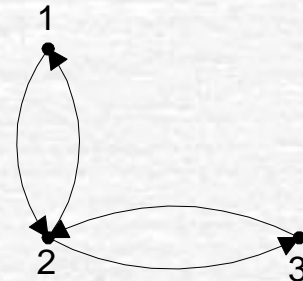


- Graf berarah  $G$  dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari  $G$  diperoleh dengan menghilangkan arahnya).
- Dua simpul,  $u$  dan  $v$ , pada graf berarah  $G$  disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari  $u$  ke  $v$  dan juga lintasan berarah dari  $v$  ke  $u$ .
- Jika  $u$  dan  $v$  tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka  $u$  dan  $v$  dikatakan **terhubung lemah** (*weakly connected*).

- Graf berarah  $G$  disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang  $u$  dan  $v$  di  $G$ , terhubung kuat. Kalau tidak,  $G$  disebut **graf terhubung lemah**.



graf berarah terhubung lemah

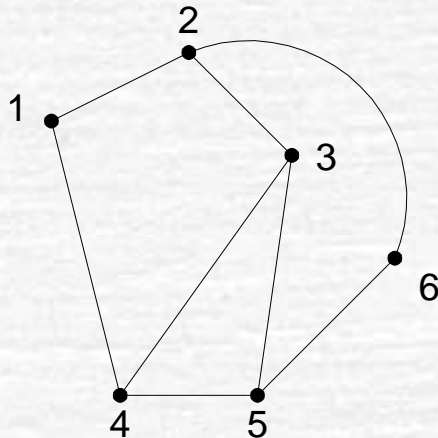


graf berarah terhubung kuat

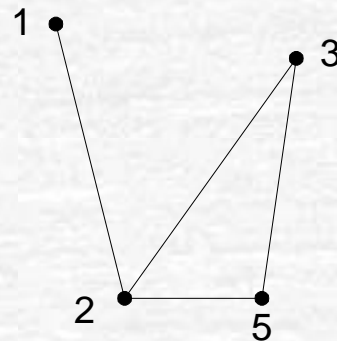
## 8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah **upagraf** (*subgraph*) dari  $G$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$ .

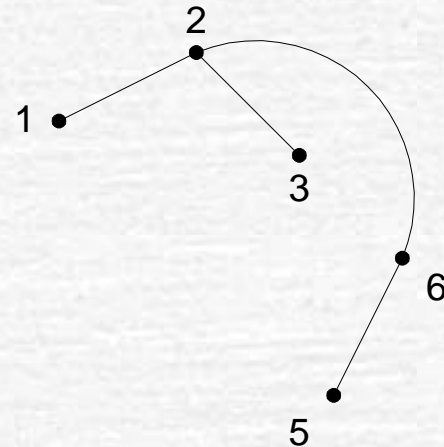
**Komplemen** dari upagraf  $G_1$  terhadap graf  $G$  adalah graf  $G_2 = (V_2, E_2)$  sedemikian sehingga  $E_2 = E - E_1$  dan  $V_2$  adalah himpunan simpul yang anggota-anggota  $E_2$  bersisian dengannya.



(a) Graf  $G_1$



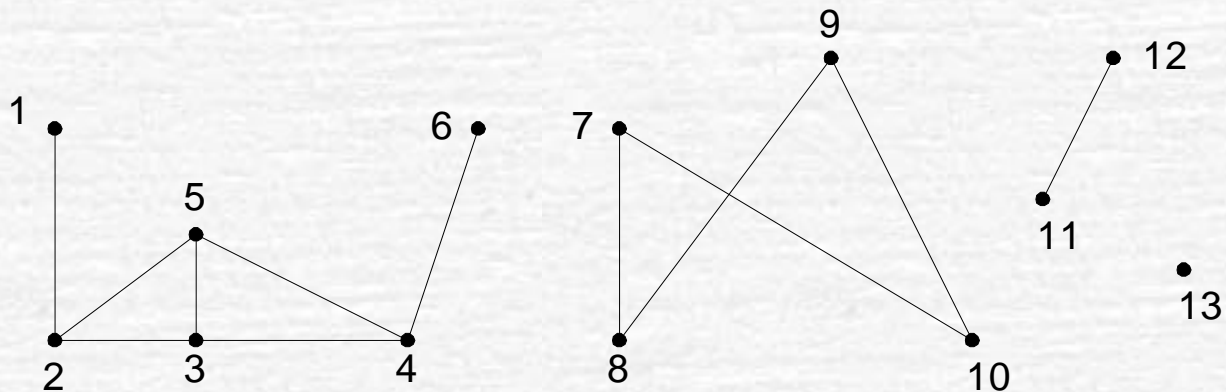
(b) Sebuah upagraf



(c) komplemen dari upagraf (b)

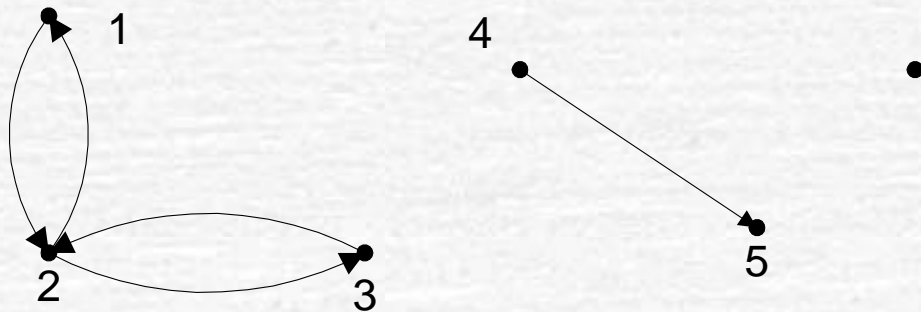
**Komponen** graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf  $G$ .

Graf  $G$  di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



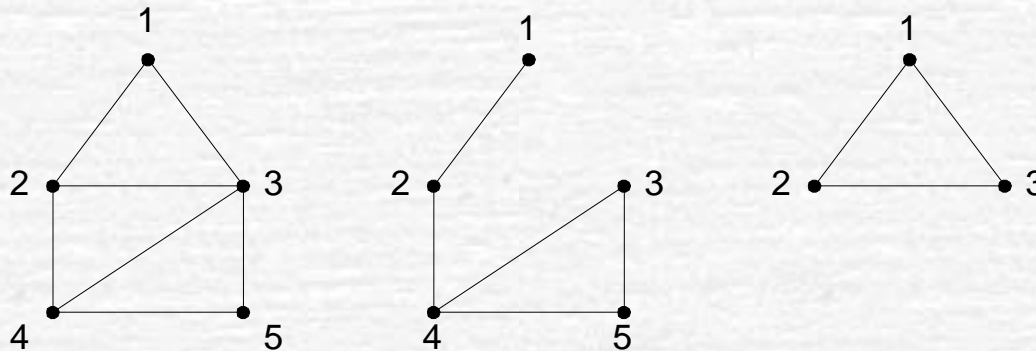
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



## 9. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf  $G_1 = (V_1, E_1)$  dari  $G = (V, E)$  dikatakan **upagraf rentang** jika  $V_1 = V$  (yaitu  $G_1$  mengandung semua simpul dari  $G$ ).



(a) graf  $G$ ,      (b) upagraf rentang dari  $G$ ,      (c) bukan upagraf rentang dari  $G$



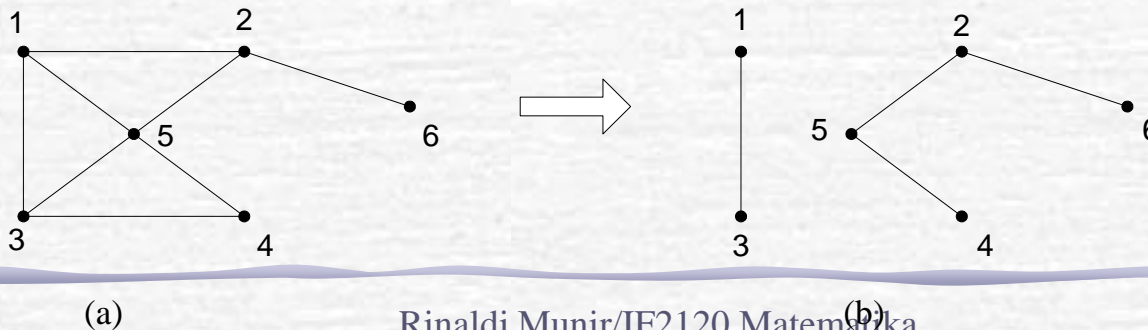
## 10. Cut-Set

*Cut-set* dari graf terhubung  $G$  adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari  $G$  menyebabkan  $G$  tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah,  $\{(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)\}$  adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

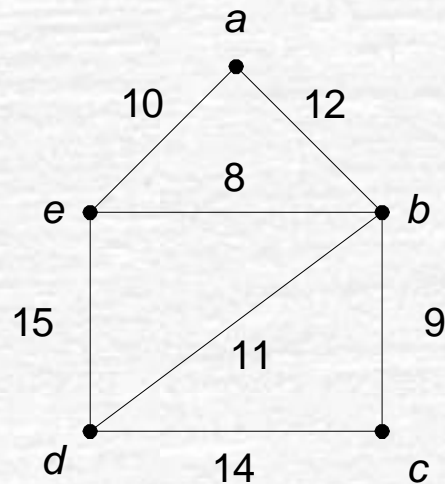
Himpunan  $\{(1,2), (2,5)\}$  juga adalah *cut-set*,  $\{(1,3), (1,5), (1,2)\}$  adalah *cut-set*,  $\{(2,6)\}$  juga *cut-set*,

tetapi  $\{(1,2), (2,5), (4,5)\}$  bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya,  $\{(1,2), (2,5)\}$  adalah *cut-set*.



## 11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

*Graf berbobot* adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



# Beberapa Graf Khusus

## a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

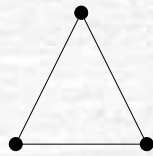
**Graf lengkap** ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah simpul dilambangkan dengan  $K_n$ . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari  $n$  buah simpul adalah  $n(n - 1)/2$ .



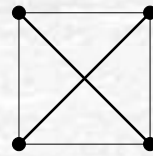
$K_1$



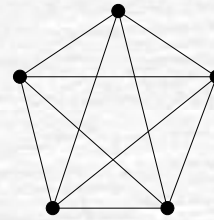
$K_2$



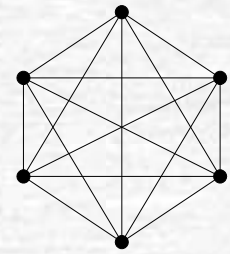
$K_3$



$K_4$



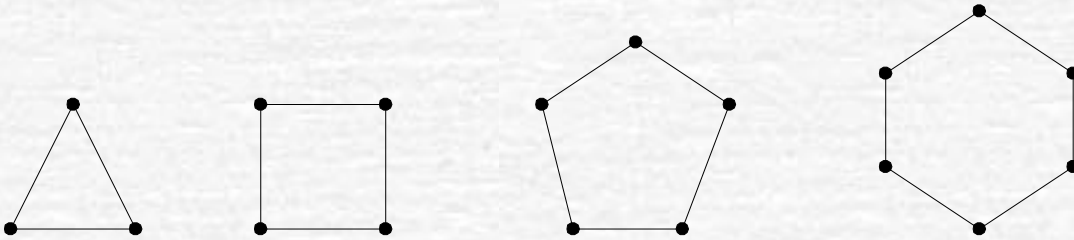
$K_5$



$K_6$

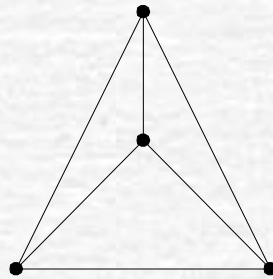
## b. Graf Lingkaran

**Graf lingkaran** adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ .



### c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah  $r$ , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat  $r$ . Jumlah sisi pada graf teratur adalah  $nr/2$ .



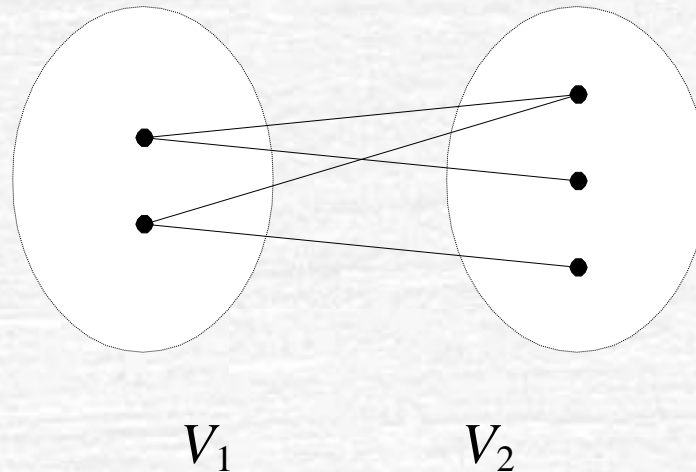
# Latihan

- Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat  $\geq 4$  ?

- Jawaban: Tiap simpul berderajat sama  $\rightarrow$  graf teratur.
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat  $r$  adalah  $e = nr/2$ . Jadi,  $n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r$ .
- Untuk  $r = 4$ , jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu  $n = 32/4 = 8$ .
- Untuk  $r$  yang lain ( $r > 4$  dan  $r$  merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):
  - $r = 8 \rightarrow n = 32/8 = 4 \rightarrow$  tidak mungkin membuat graf sederhana.
  - $r = 16 \rightarrow n = 32/16 = 2 \rightarrow$  tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

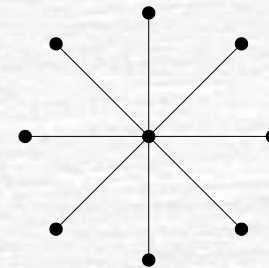
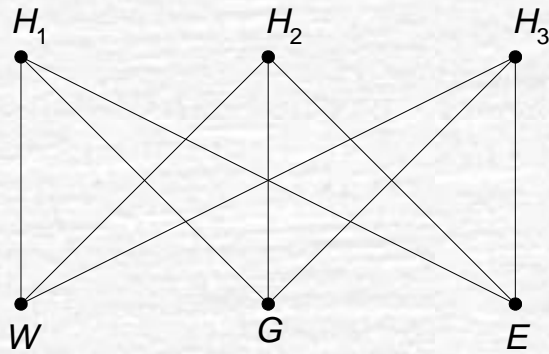
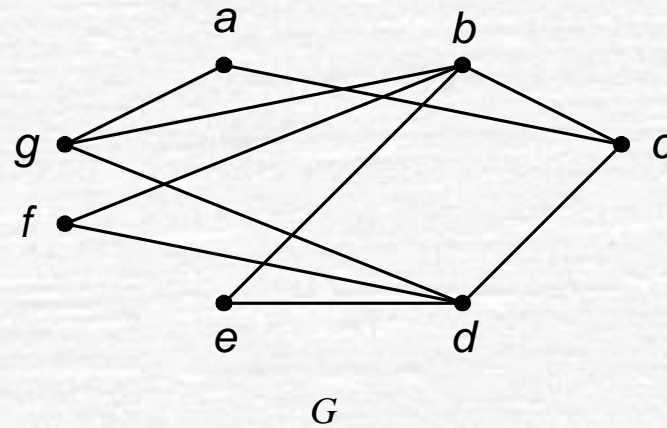
#### d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

Graf  $G$  yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian  $V_1$  dan  $V_2$ , sedemikian sehingga setiap sisi pada  $G$  menghubungkan sebuah simpul di  $V_1$  ke sebuah simpul di  $V_2$  disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai  $G(V_1, V_2)$ .





Graf  $G$  di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi  $V_1 = \{a, b, d\}$  dan  $V_2 = \{c, e, f, g\}$



graf persoalan utilitas ( $K_{3,3}$ ),

topologi bintang

# Representasi Graf

## 1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Contoh:

1 2 3 4

$$\begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(a)

1 2 3 4 5

$$\begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(b)

1 2 3 4

$$\begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(c)

1 2 3 4

$$\begin{matrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Derajat tiap simpul  $i$ :

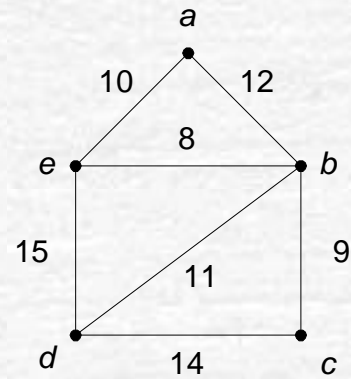
(a) Untuk graf tak-berarah

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

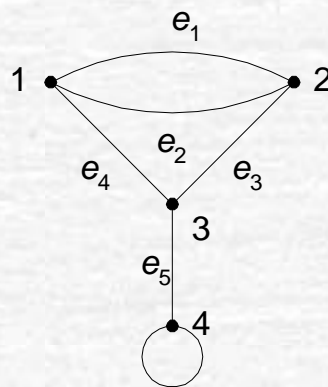


	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	$\infty$	12	$\infty$	$\infty$	10
<i>b</i>	12	$\infty$	9	11	8
<i>c</i>	$\infty$	9	$\infty$	14	$\infty$
<i>d</i>	$\infty$	11	14	$\infty$	15
<i>e</i>	10	8	$\infty$	15	$\infty$

## 2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

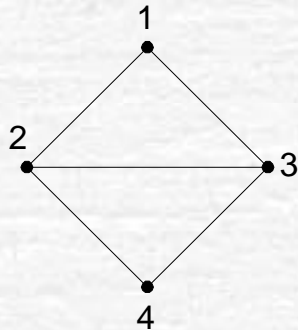
$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



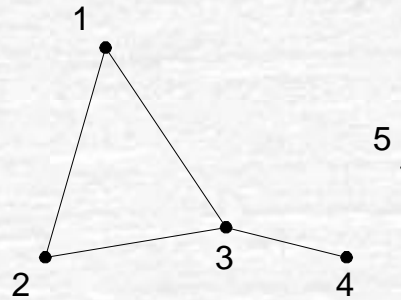
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



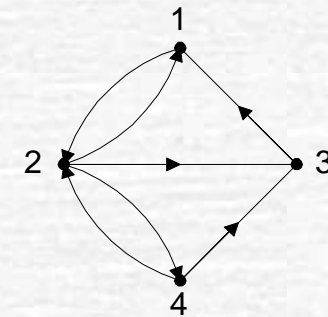
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)



Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

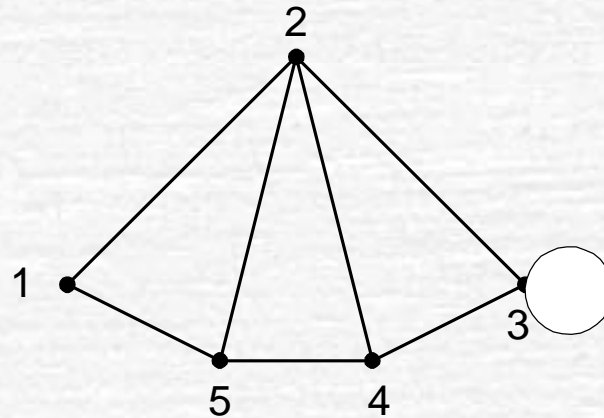
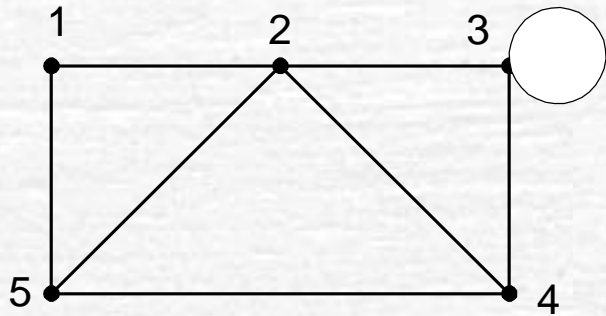
# Graf Isomorfik

- Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



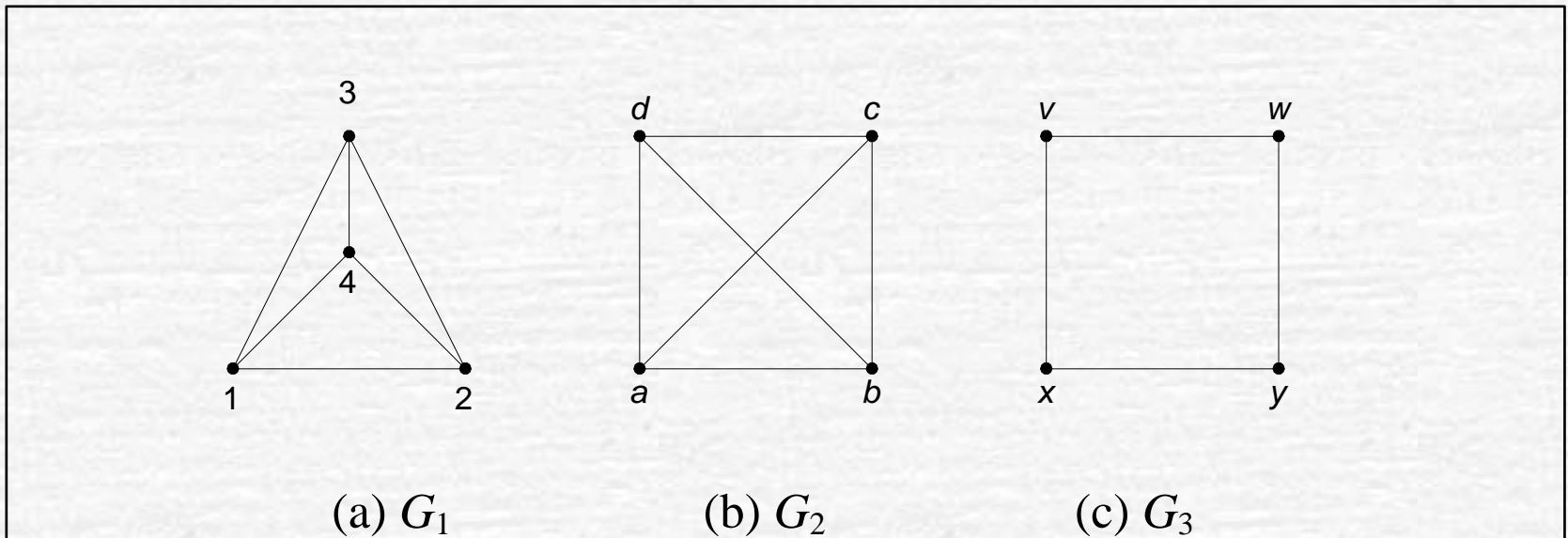
➤ Jawaban:



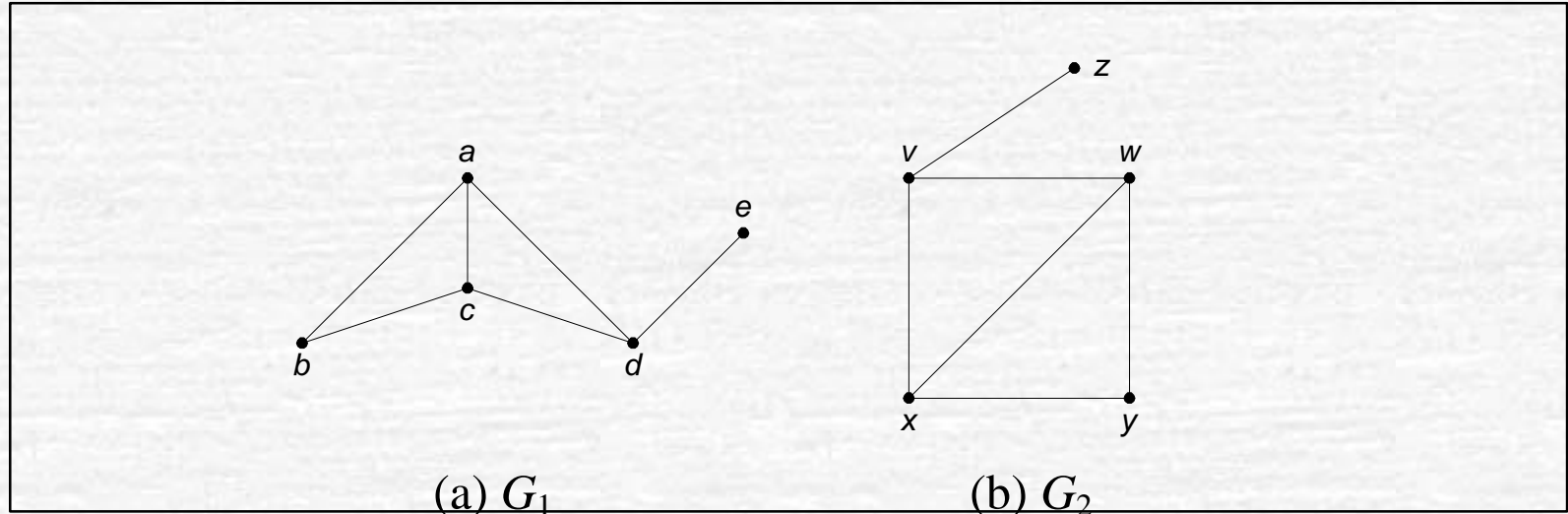
➤ Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda)  
→ **isomorfik!**

# Graf Isomorfik

- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.
- Dua buah graf,  $G_1$  dan  $G_2$  dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.
- Dengan kata lain, misalkan sisi  $e$  bersisian dengan simpul  $u$  dan  $v$  di  $G_1$ , maka sisi  $e'$  yang berkoresponden di  $G_2$  harus bersisian dengan simpul  $u'$  dan  $v'$  yang di  $G_2$ .
- Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



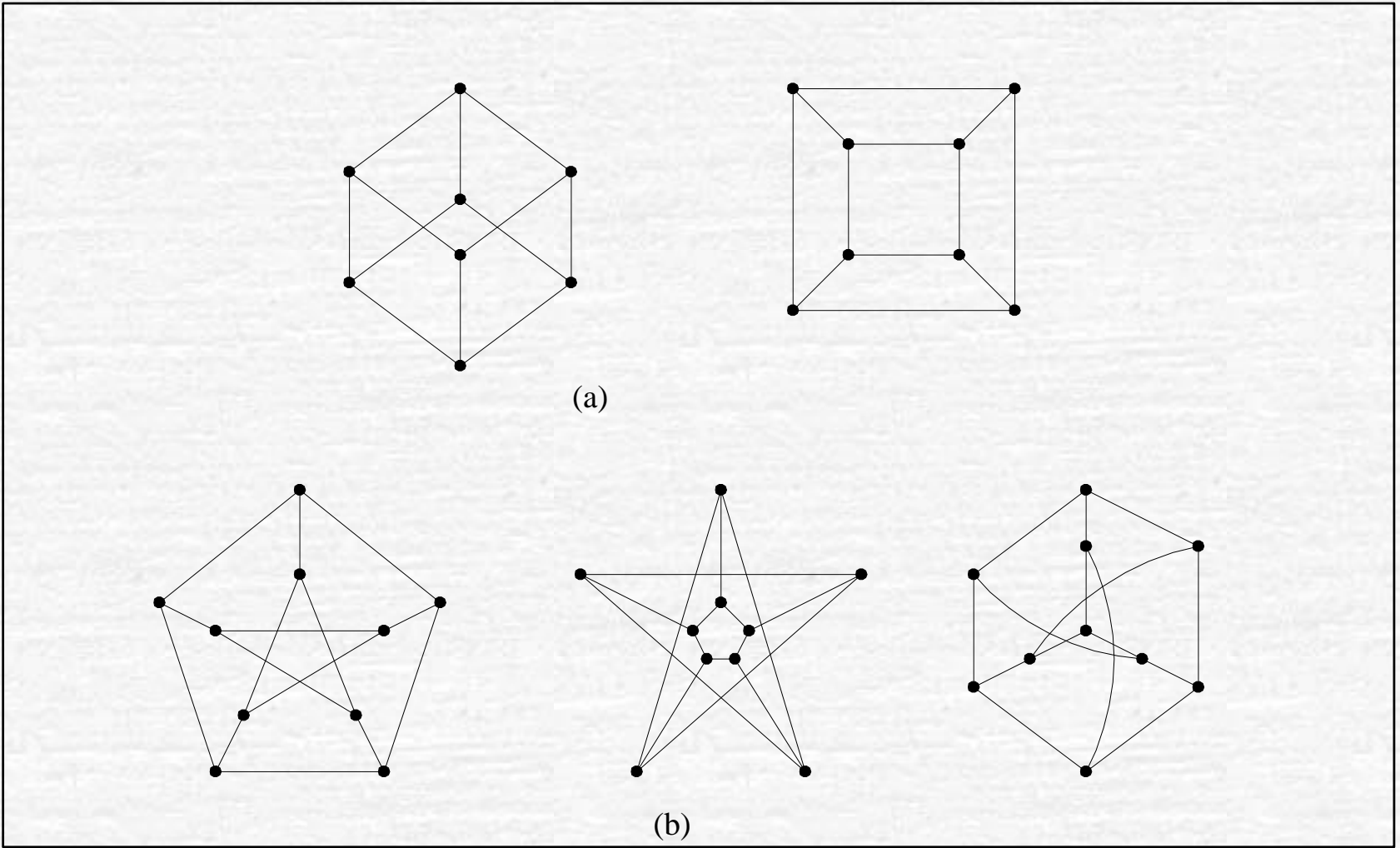
**Gambar 6.35**  $G_1$  isomorfik dengan  $G_2$ , tetapi  $G_1$  tidak isomorfik dengan  $G_3$



**Gambar 6.36** Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$A_{G_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_{G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & w & v & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

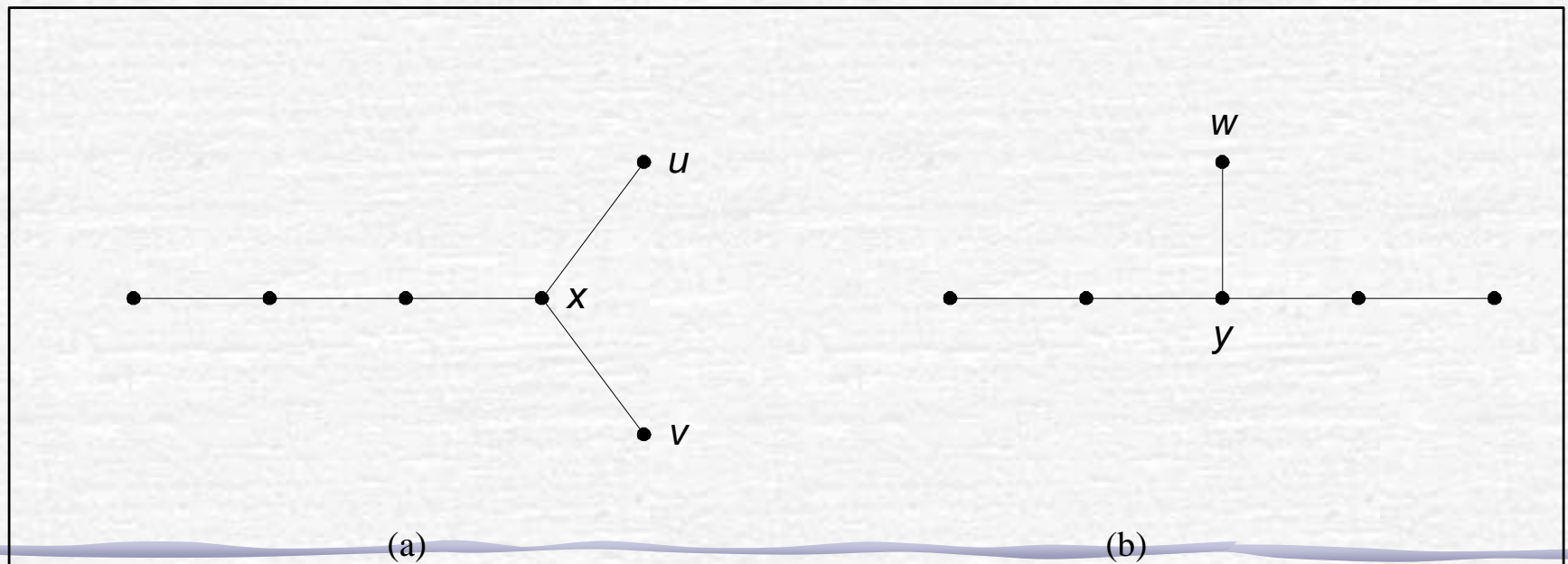


**Gambar 6.38** (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

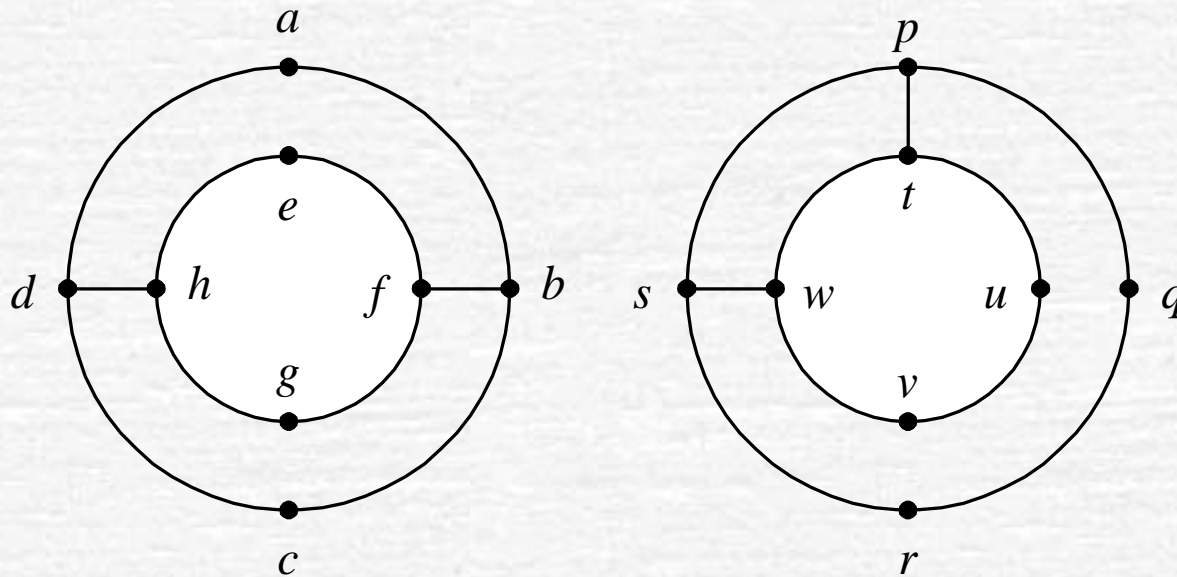
1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.



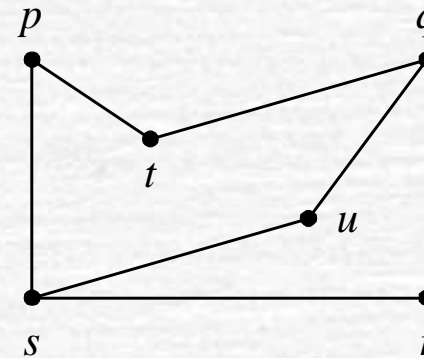
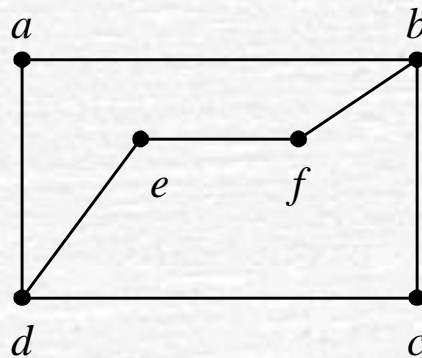
# Latihan

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?



# Latihan

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?

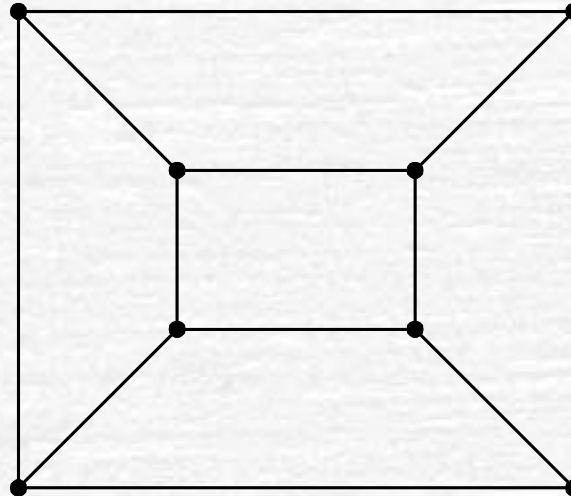
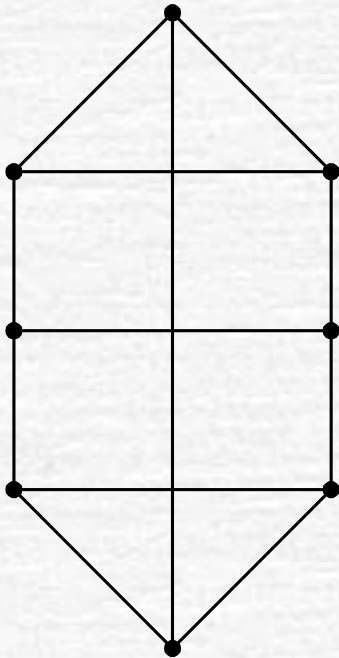




# Latihan

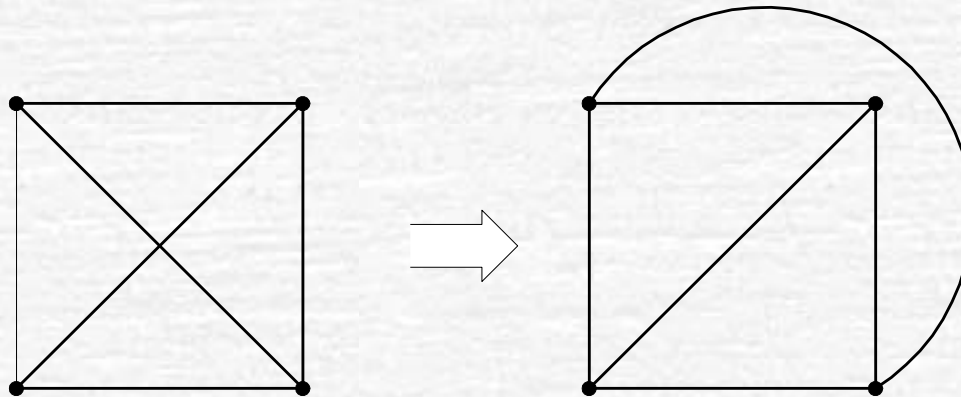
- Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul

Jawaban:

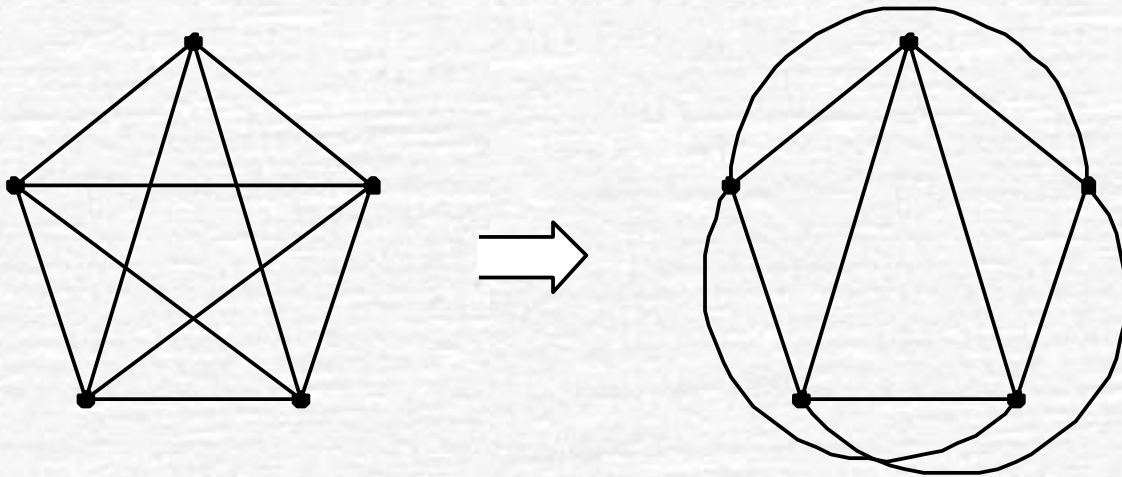


# Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

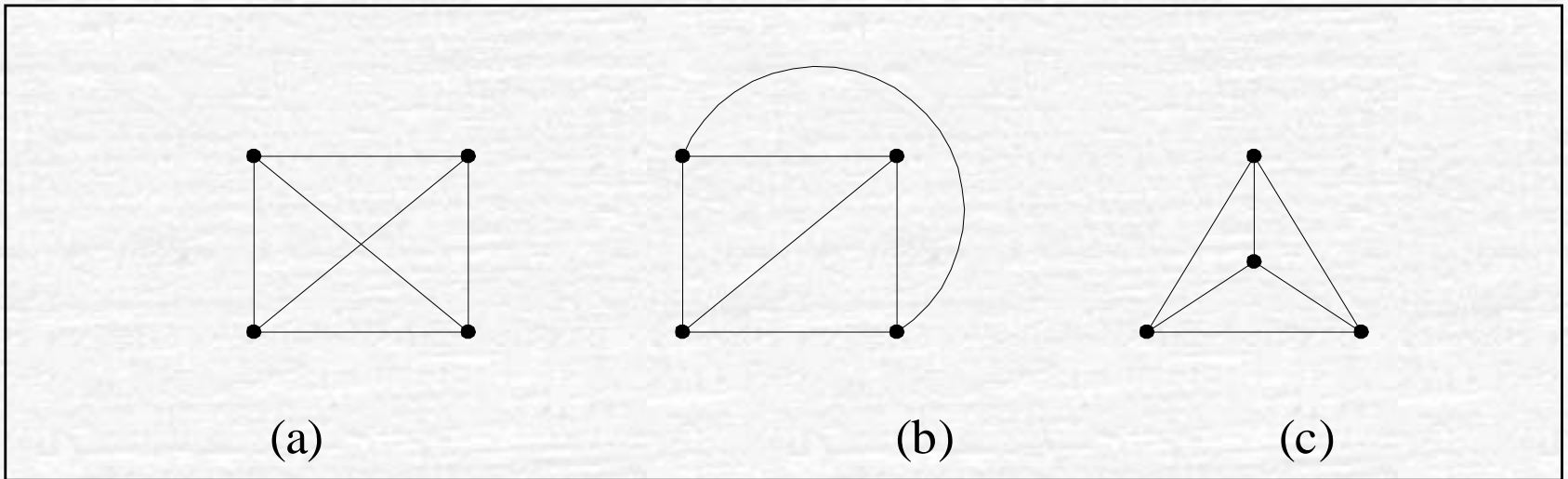
- Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut **graf planar**,
- jika tidak, maka ia disebut **graf tak-planar**.
- $K_4$  adalah graf planar:



•  $K_5$  adalah graf tidak planar:



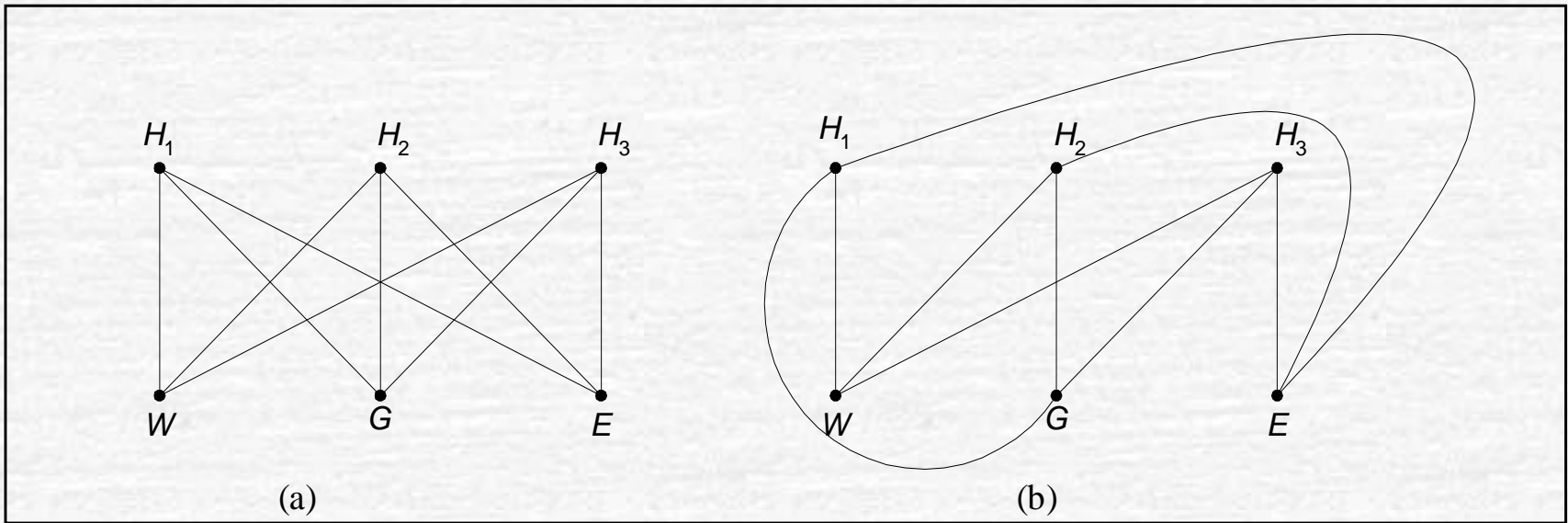
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).



Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

# Aplikasi Graf Planar

## Persoalan utilitas (*utility problem*)



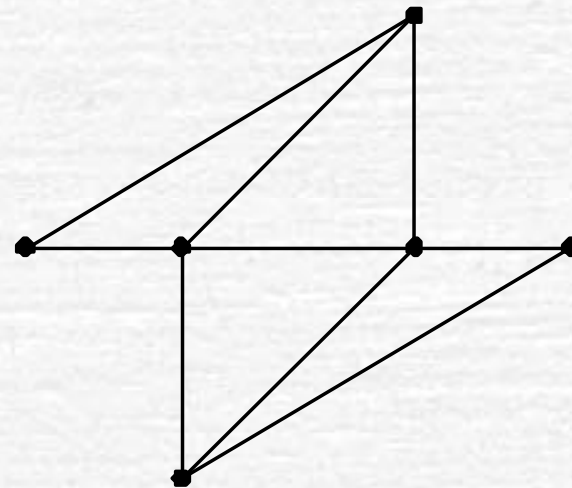
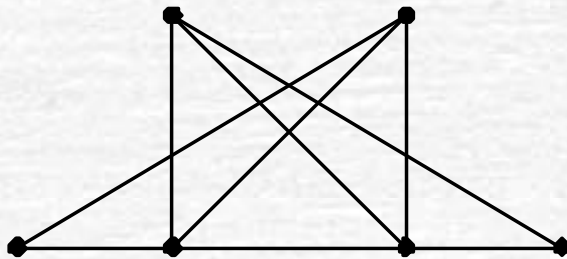
(a) Graf persoalan utilitas ( $K_{3,3}$ ), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

## Aplikasi Graf Planar

- Perancangan IC (*Integrated Circuit*)
- Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam *IC-board* yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik → *malfunction*
- Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

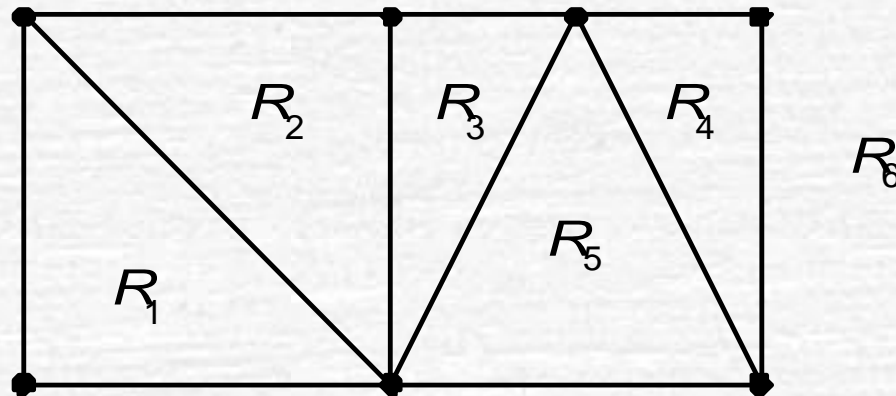
# Latihan

- Gambarkan graf (kiri) di bawah ini sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang). (Solusi: graf kanan)



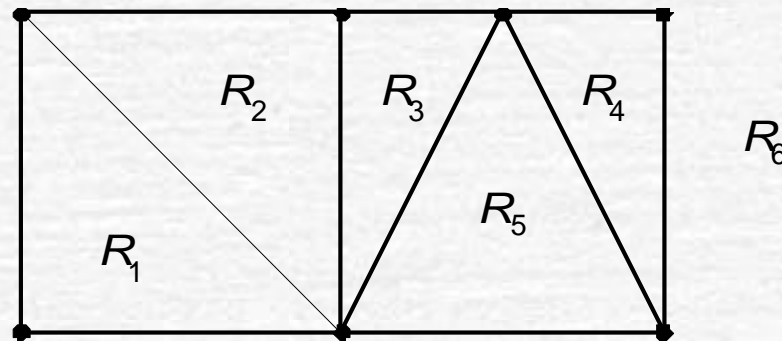


- Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*).
- Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



- Hubungan antara jumlah simpul ( $n$ ), jumlah sisi ( $e$ ), dan jumlah wilayah ( $f$ ) pada graf bidang:

$$n - e + f = 2 \quad (\text{Rumus Euler})$$



- Pada Gambar di atas,  $e = 11$  dan  $n = 7$ ,  $f = 6$ , maka  $7 - 11 + 6 = 2$ .

# Latihan

- Misalkan graf sederhana planar memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?

# Jawaban:

- Diketahui  $n =$  jumlah simpul  $= 24$ , maka jumlah derajat seluruh simpul  $= 24 \times 4 = 96$ .
- Menurut *lemma* jabat tangan,  
jumlah derajat  $= 2 \times$  jumlah sisi,  
sehingga  
jumlah sisi  $= e =$  jumlah derajat/2  $= 96/2 = 48$
- Dari rumus Euler,  $n - e + f = 2$ , sehingga  
 $f = 2 - n + e = 2 - 24 + 48 = 26$  buah.

- Pada graf planar sederhana terhubung dengan  $f$  buah wilayah,  $n$  buah simpul, dan  $e$  buah sisi ( $e > 2$ ) selalu berlaku:

$$e \leq 3n - 6$$

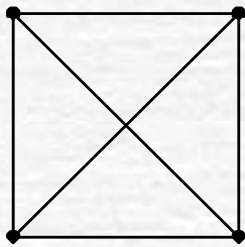
- Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**,
- yang dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana
- kalau graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi.

- Contoh: Pada  $K_4$ ,  $n = 4$ ,  $e = 6$ , memenuhi ketidaksamaan Euler, sebab

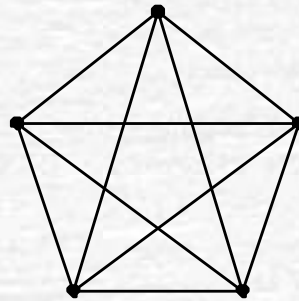
$$6 \leq 3(4) - 6. \text{ Jadi, } K_4 \text{ adalah graf planar.}$$

Pada graf  $K_5$ ,  $n = 5$  dan  $e = 10$ , tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab

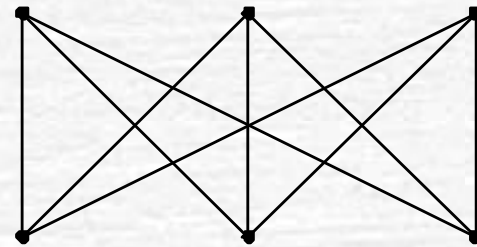
$$10 \geq 3(5) - 6. \text{ Jadi, } K_5 \text{ tidak planar}$$



$K_4$



$K_5$



$K_{3,3}$

Ketidaksamaan  $e \leq 3n - 6$  tidak berlaku untuk  $K_{3,3}$  karena

$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (3)(6) - 6 = 12 \quad (\text{jadi, } e \leq 3n - 6)$$

padahal graf  $K_{3,3}$  bukan graf planar!

Buat asumsi baru: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi,

Dari penurunan rumus diperoleh

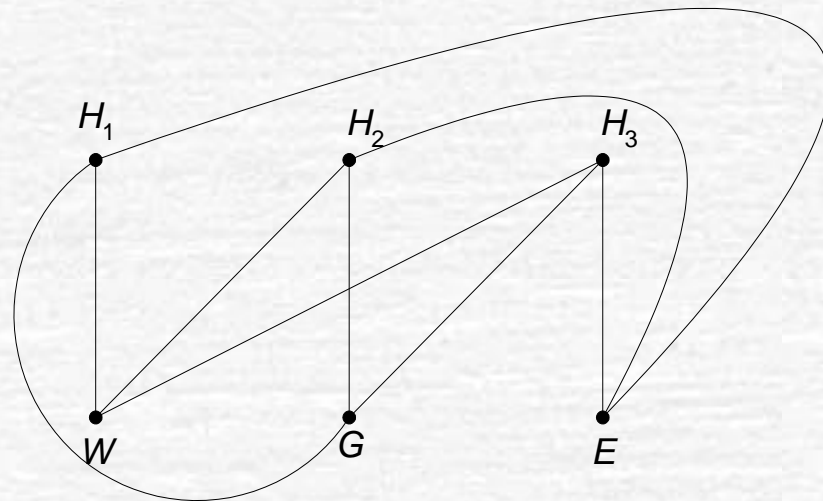
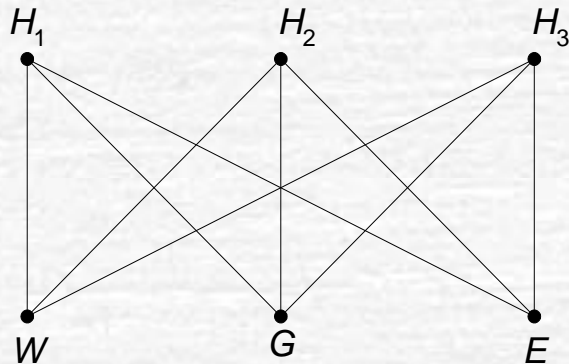
$$e \leq 2n - 4$$

**Contoh** Graf  $K_{3,3}$  pada Gambar di bawah memenuhi ketidaksamaan  $e \leq 2n - 4$ , karena

$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (2)(6) - 4 = 8 \quad (\text{salah})$$

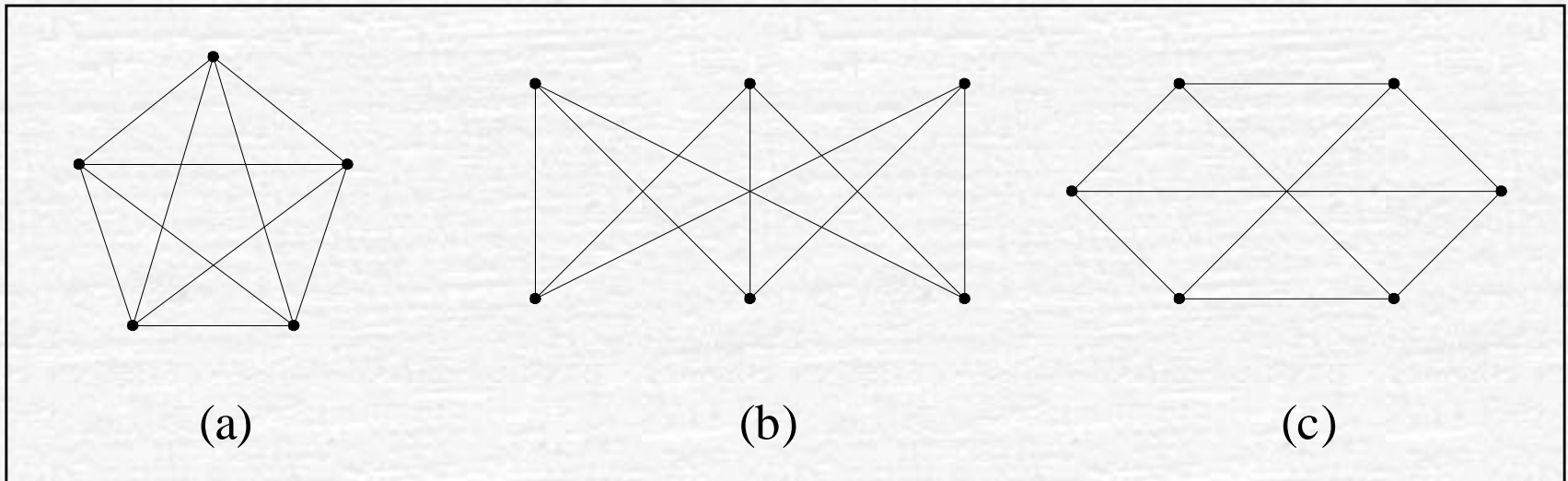
yang berarti  $K_{3,3}$  bukan graf planar.





# Teorema Kuratowski

Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf.



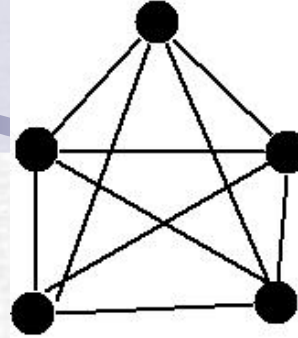
**Gambar** (a) Graf Kuratowski pertama ( $K_5$ )

(b) Graf Kuratowski kedua ( $K_{3,3}$ )

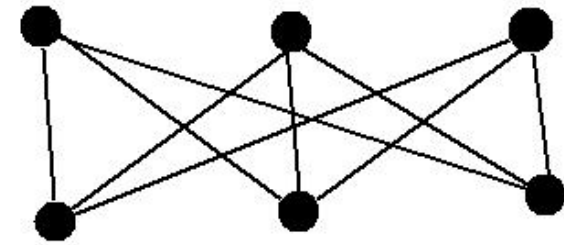
(c) Graf yang isomorfik dengan graf Kuratowski kedua



**Kazimierz Kuratowski** (February 2, 1896 – June 18, 1980) was a Polish mathematician and logician. He was one of the leading representatives of the Warsaw School of Mathematics. (Sumber: Wikipedia)



G1

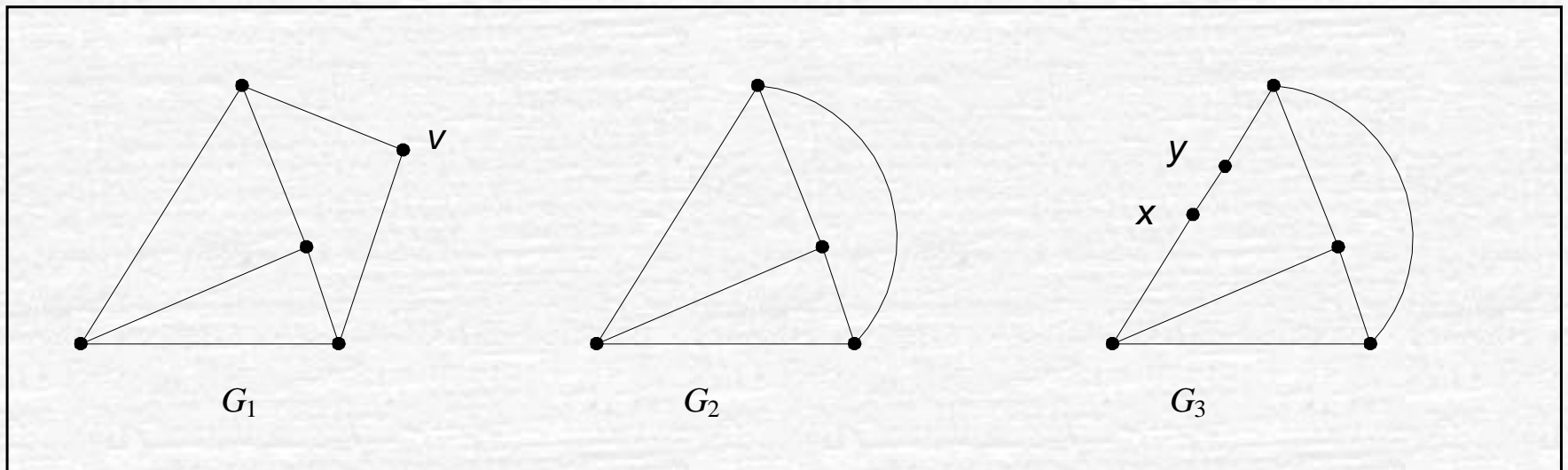


G2

Sifat graf Kuratowski adalah:

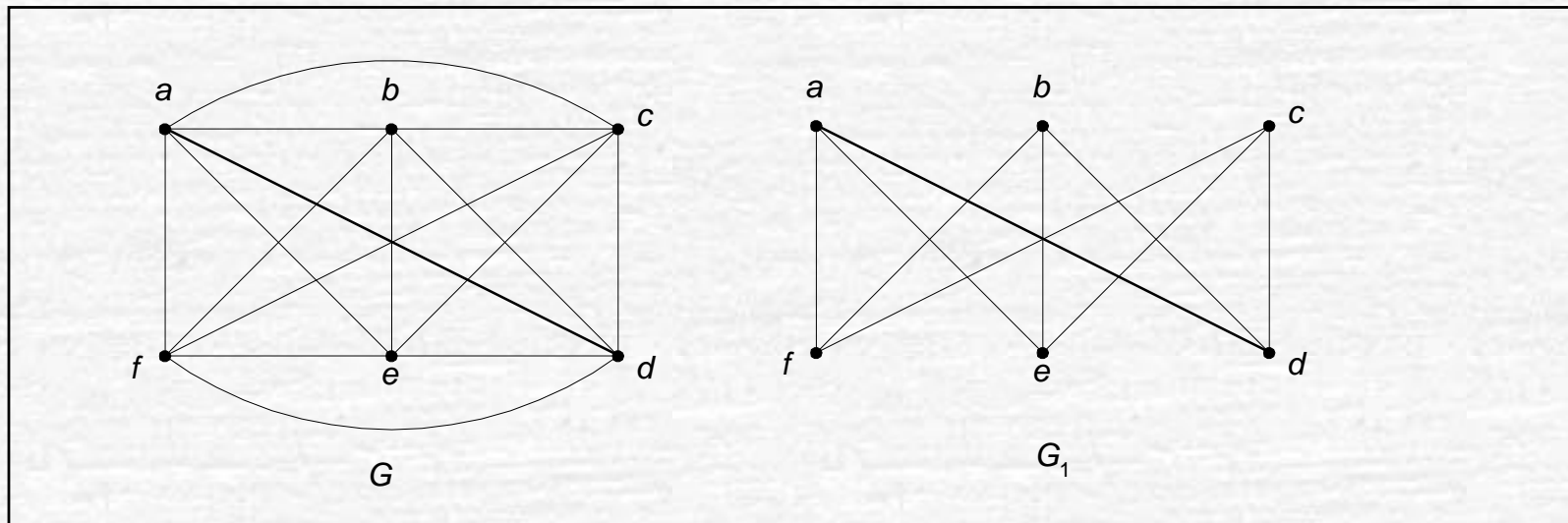
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

**TEOREMA Kuratowski.** Graf  $G$  bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



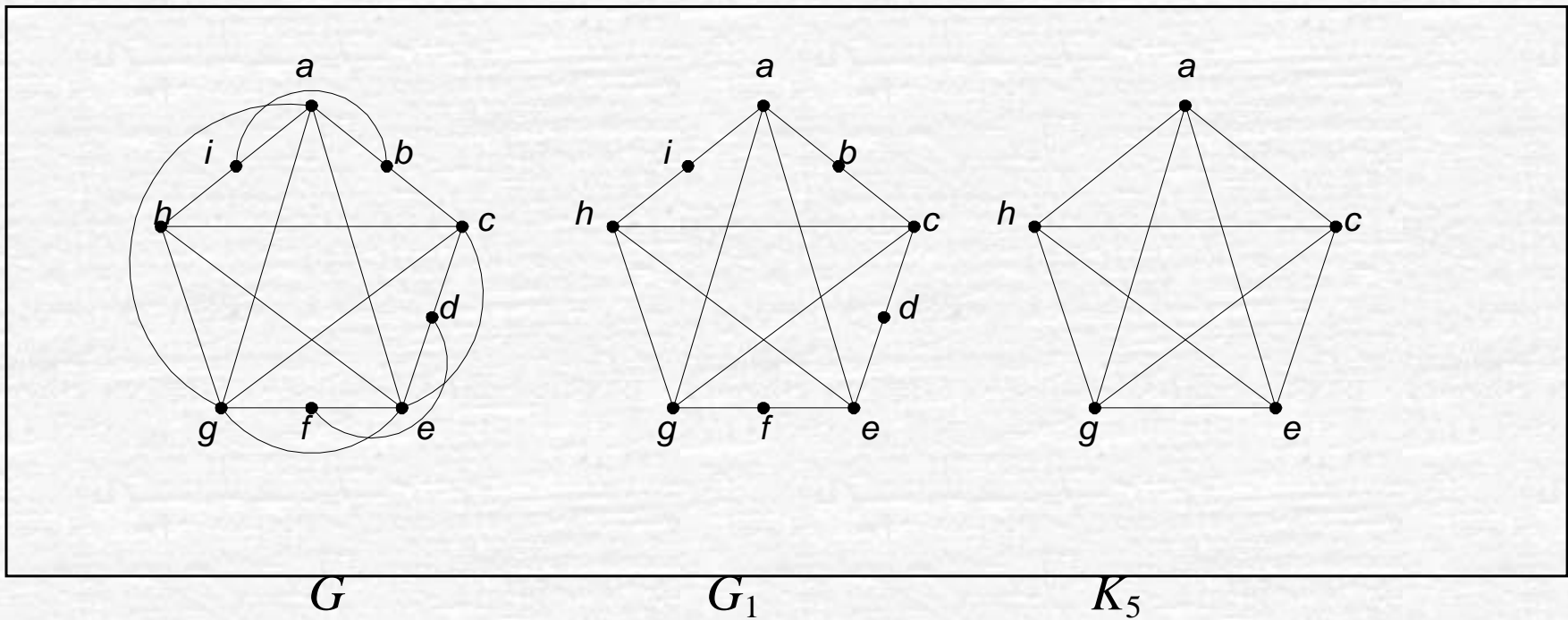
**Gambar** Tiga buah graf yang homemorfik satu sama lain.

**Contoh:** Kita gunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf. Graf  $G$  di bawah ini bukan graf planar karena ia mengandung upagraf ( $G_1$ ) yang sama dengan  $K_{3,3}$ .



Graf  $G$  tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan  $K_{3,3}$ .

Graf  $G$  tidak planar karena ia mengandung upagraf ( $G_1$ ) yang homeomorfik dengan  $K_5$  (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari  $G_1$ , diperoleh  $K_5$ ).

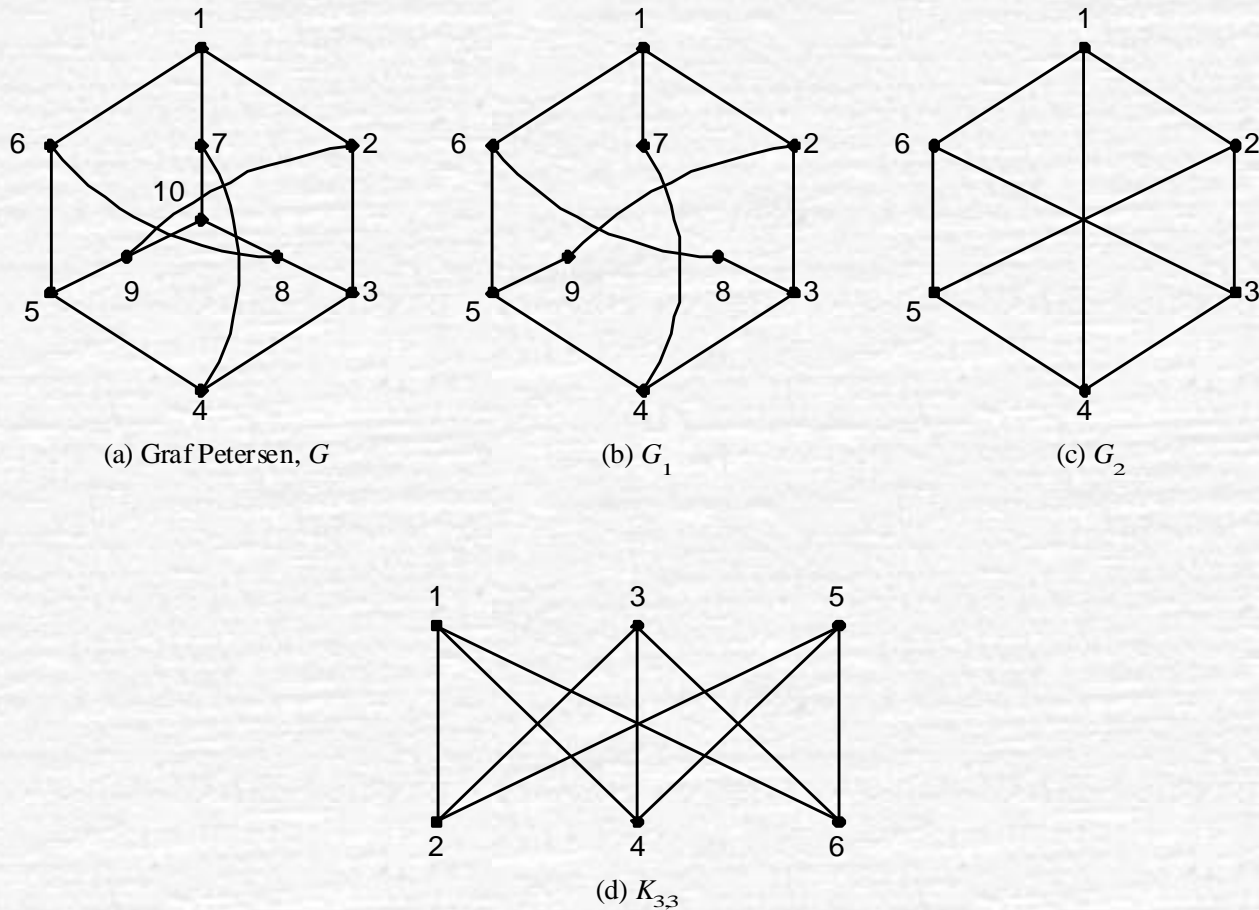


**Gambar** Graf  $G$ , upagraf  $G_1$  dari  $G$  yang homeomorfik dengan  $K_5$ .

# Latihan

- Perlihatkan dengan teorema Kuratowski bahwa graf Petersen tidak planar.

# Jawaban:



- Gambar** (a) Graf Petersen  
(b)  $G_1$  adalah upagraf dari  $G$   
(c)  $G_2$  homeomorfik dengan  $G_1$   
(d)  $G_2$  isomorfik dengan  $K_{3,3}$



# Lintasan dan Sirkuit Euler

- **Lintasan Euler** ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.
- Sirkuit Euler ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali..
- Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).

# Contoh.

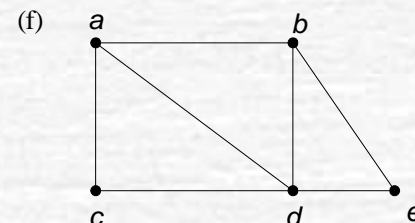
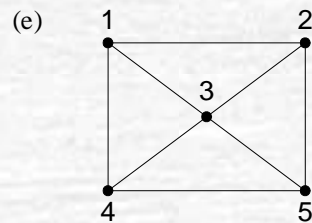
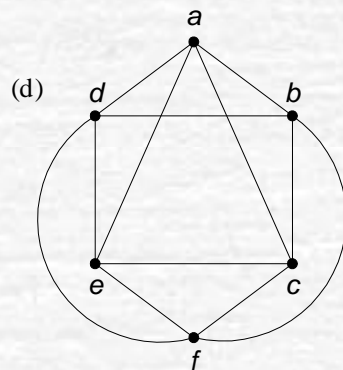
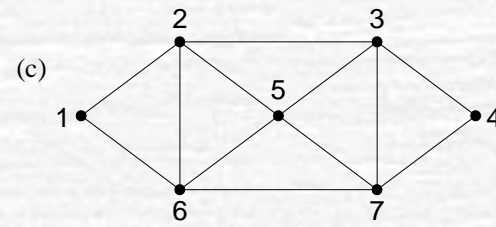
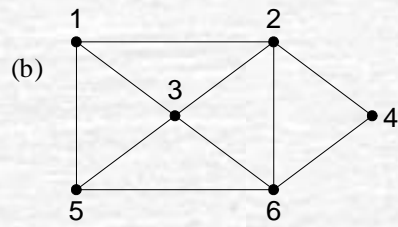
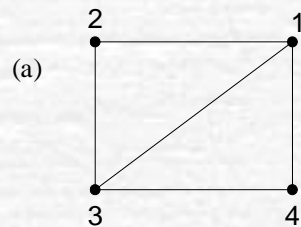
Lintasan Euler pada graf (a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1

Lintasan Euler pada graf (b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3

Sirkuit Euler pada graf (c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1

Sirkuit Euler pada graf (d) :  $a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a$

Graf (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler



(a) dan (b) graf semi-Euler

(c) dan (d) graf Euler

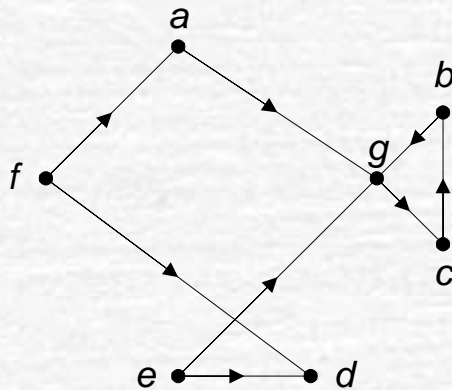
(e) dan (f) bukan graf semi-Euler atau graf Euler

**TEOREMA.** Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler jika (graf semi-Euler) dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.

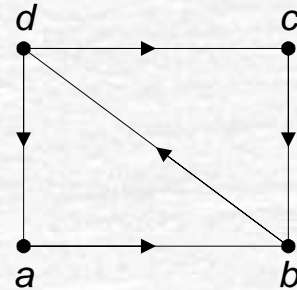
**TEOREMA.** Graf tidak berarah  $G$  adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap.

**TEOREMA.** (a) Graf berarah  $G$  memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika  $G$  terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama.

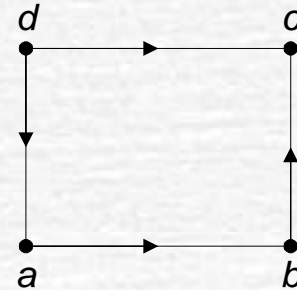
(b)  $G$  memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika  $G$  terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.



(a)



(b)

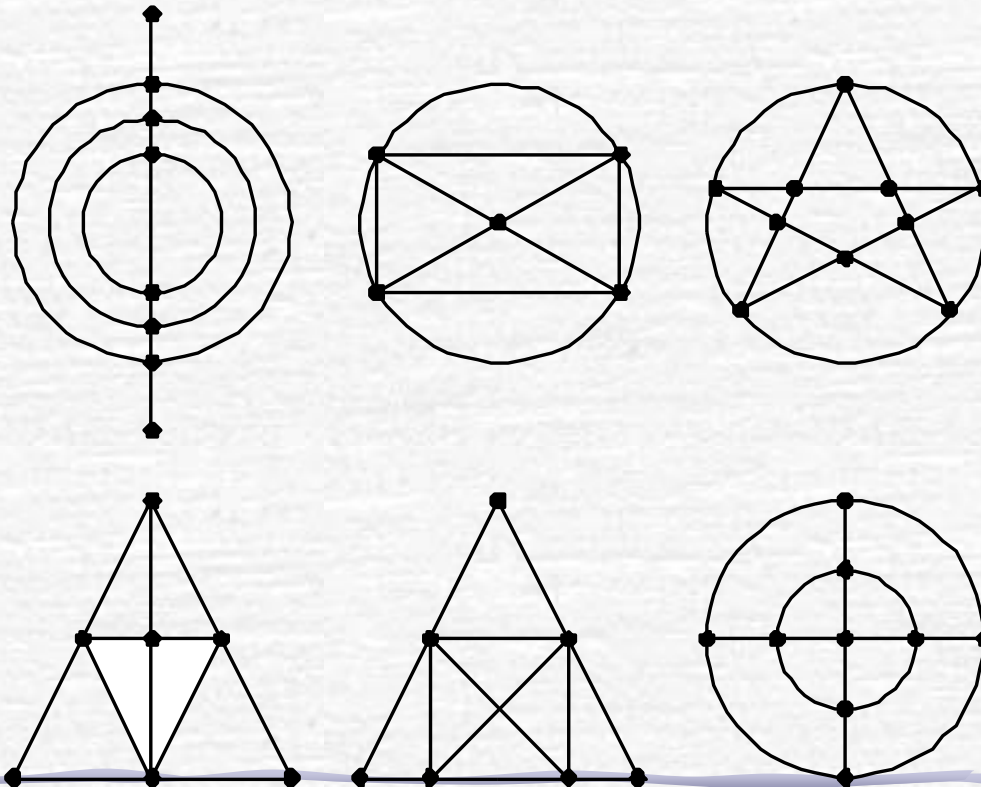


(c)

**Gambar** (a) Graf berarah Euler ( $a, g, c, b, g, e, d, f, a$ )  
 (b) Graf berarah semi-Euler ( $d, a, b, d, c, b$ )  
 (c) Graf berarah bukan Euler maupun semi-Euler

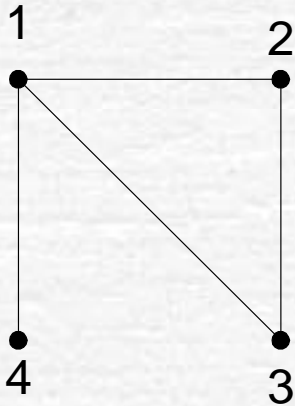
# Latihan

Manakah di antara graf di bawah ini yang dapat dilukis tanpa mengangkat pensil sekalipun?

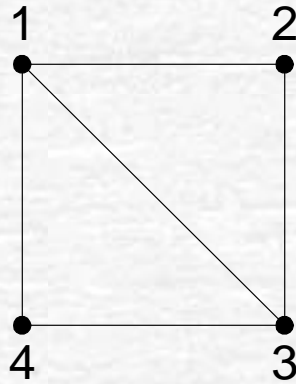


# Lintasan dan Sirkuit Hamilton

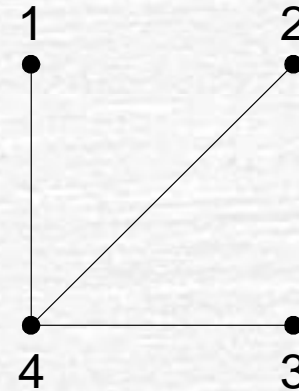
- **Lintasan Hamilton** ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.
- **Sirkuit Hamilton** ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.
- Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**.



(a)

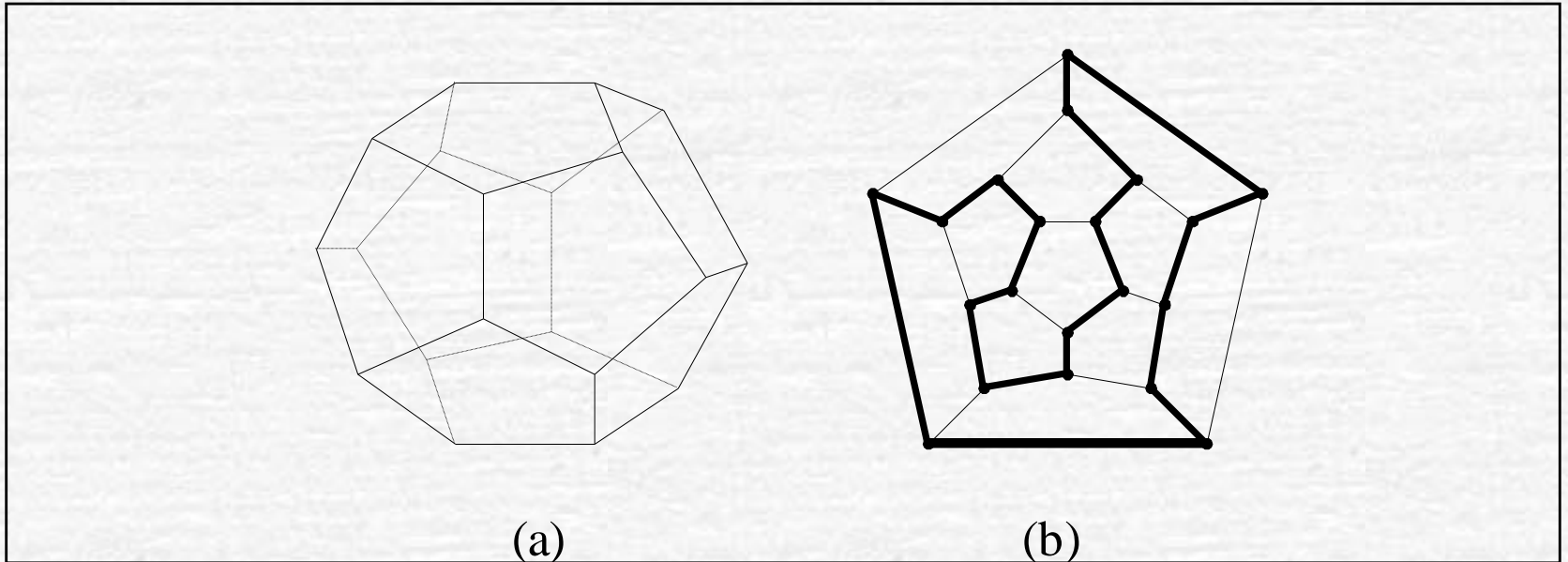


(b)



(c)

- (a) graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)
- (b) graf yang memiliki lintasan Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)
- (c) graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton



- (a) *Dodecahedron* Hamilton,  
(b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton



**TEOREMA.** Syarat cukup supaya graf sederhana  $G$  dengan  $n$  ( $\geq 3$ ) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit  $n/2$  (yaitu,  $d(v) \geq n/2$  untuk setiap simpul  $v$  di  $G$ ). (*coba nyatakan dalam “jika  $p$  maka  $q$ ”*)

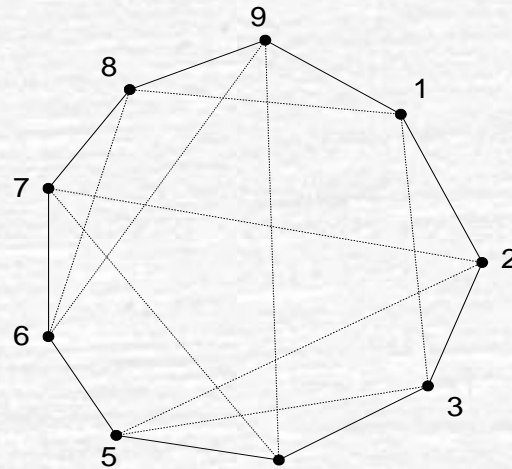
**TEOREMA.** Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

**TEOREMA.** Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$ ), terdapat  $(n - 1)!/2$  buah sirkuit Hamilton.

**TEOREMA.** Di dalam graf lengkap  $G$  dengan  $n$  buah simpul ( $n \geq 3$  dan  $n$  ganjil), terdapat  $(n - 1)/2$  buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika  $n$  genap dan  $n \geq 4$ , maka di dalam  $G$  terdapat  $(n - 2)/2$  buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

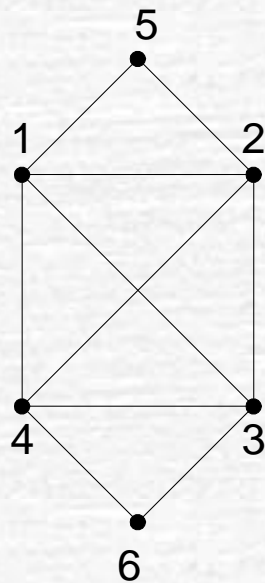
**Contoh.** Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Jawaban: Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah  $(9 - 1)/2 = 4$ .

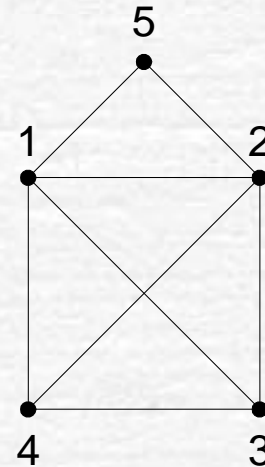


**Gambar** Graf yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya..



(a)



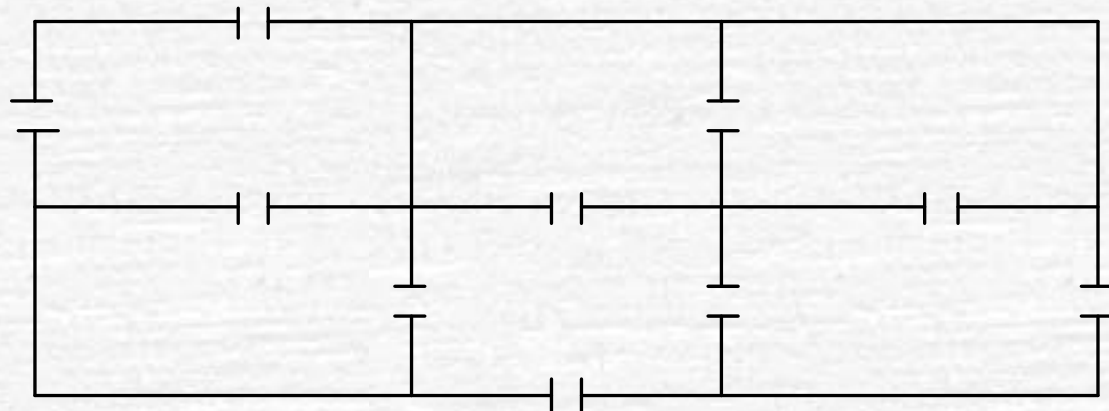
(b)

(a) Graf Hamilton sekaligus graf Euler

(b) Graf Hamilton sekaligus graf semi-Euler

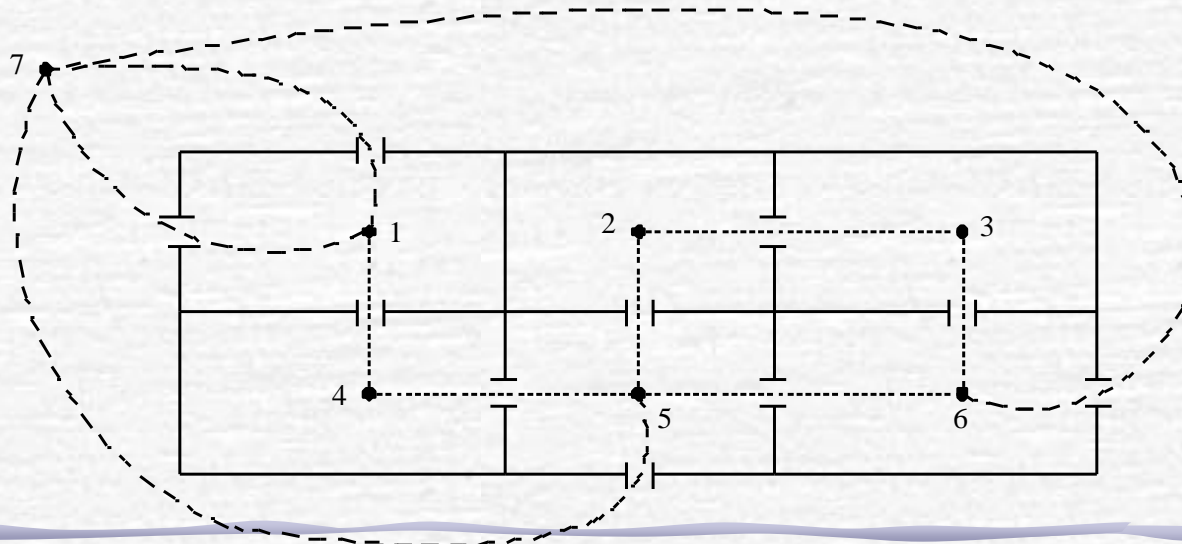
# Latihan

- Gambar di bawah ini adalah denah lantai dasar sebuah gedung. Apakah dimungkinkan berjalan melalui setiap pintu di lantai itu hanya satu kali saja jika kita boleh mulai memasuki pintu yang mana saja?



# Jawaban:

- Nyatakan ruangan sebagai simpul dan pintu antar ruangan sebagai sisi.
- Setiap pintu hanya boleh dilewati sekali (tidak harus kembali ke titik asal) → melewati sisi tepat sekali → lintasan Euler
- Di dalam graf tersebut ada 2 simpul berderajat ganjil (simpul 1 dan 6), selebihnya genap → pasti ada lintasan Euler
- Kesimpulan: setiap pintu dapat dilewati sekali saja



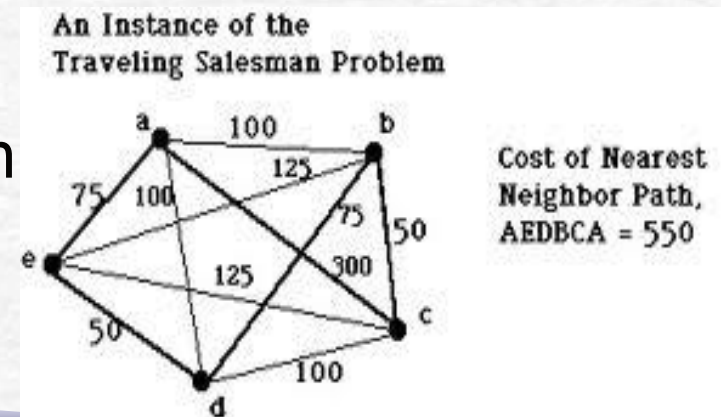
# Beberapa Aplikasi Graf

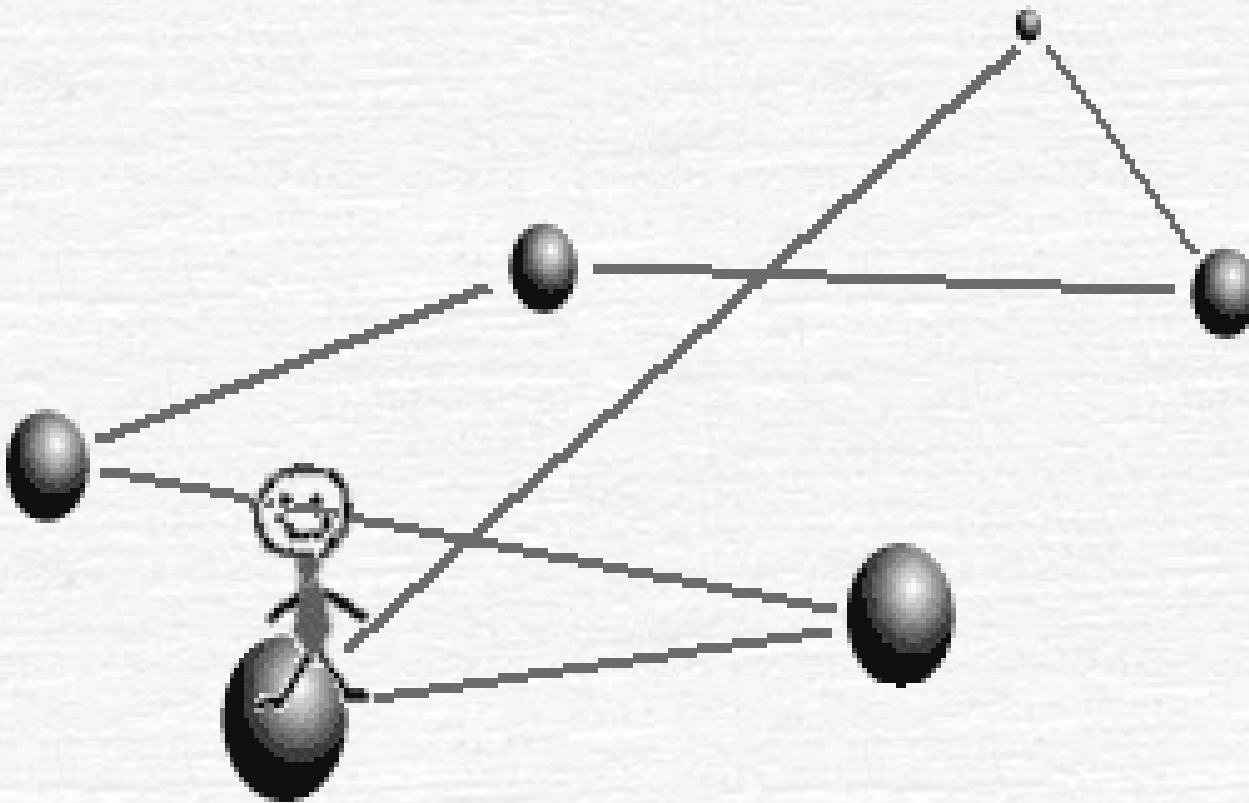
- Lintasan terpendek (*shortest path*)  
(akan dibahas pada kuliah IF3051)
- Persoalan pedagang keliling (*travelling salesperson problem*)
- Persoalan tukang pos Cina (*chinese postman problem*)
- Pewarnaan graf (*graph colouring*)

# Persoalan Pedagang Keliling (*travelling salesperson problem (TSP)*)

Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan tur terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

==> menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.



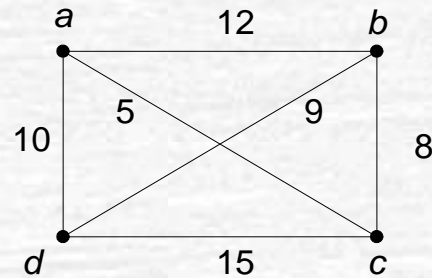




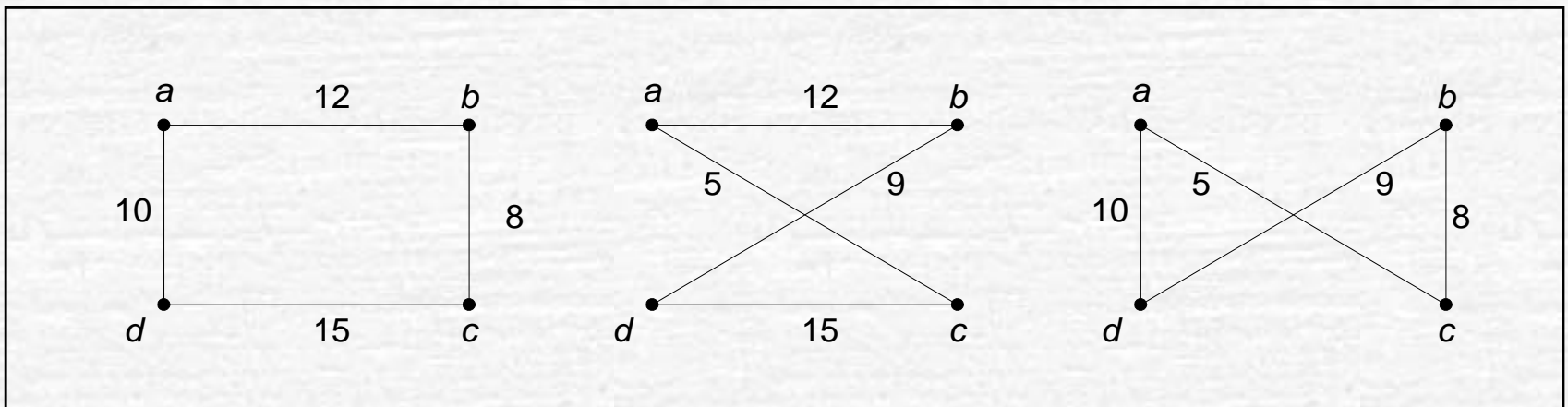
## Aplikasi TSP:

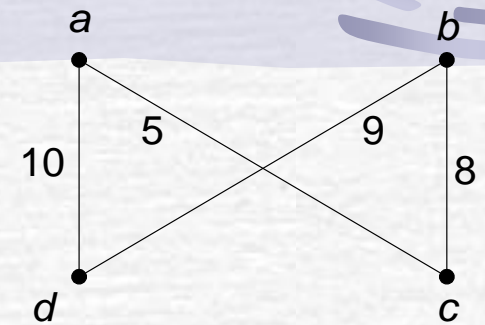
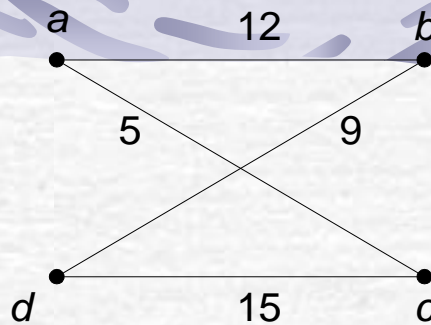
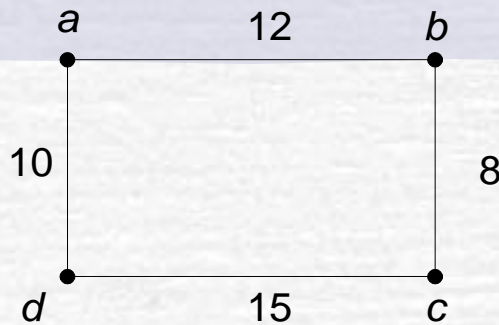
1. Pak Pos mengambil surat di kotak pos yang tersebar pada  $n$  buah lokasi di berbagai sudut kota.
2. Lengan robot mengencangkan  $n$  buah mur pada beberapa buah peralatan mesin dalam sebuah jalur perakitan.
3. Produksi  $n$  komoditi berbeda dalam sebuah siklus.

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan  $n$  simpul:  $(n - 1)!/2$ .



Graf di atas memiliki  $(4 - 1)!/2 = 3$  sirkuit Hamilton, yaitu:





$$I_1 = (a, b, c, d, a) \rightarrow \text{bobot} = 10 + 12 + 8 + 15 = 45$$

$$I_2 = (a, c, d, b, a) \rightarrow \text{bobot} = 12 + 5 + 9 + 15 = 41$$

$$I_3 = (a, c, b, d, a) \rightarrow \text{bobot} = 10 + 5 + 9 + 8 = 32$$

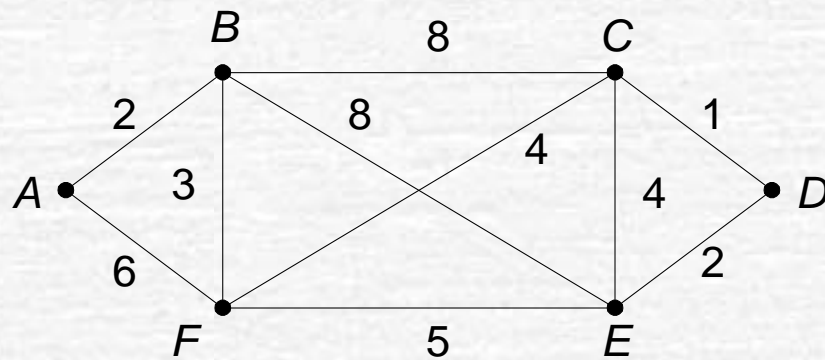
Sirkuit Hamilton terpendek:  $I_3 = (a, c, b, d, a)$

dengan bobot =  $10 + 5 + 9 + 8 = 32$ .

- Jika jumlah simpul  $n = 20$  akan terdapat  $(19!)/2$  sirkuit Hamilton atau sekitar  $6 \times 10^{16}$  penyelesaian.

# Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

- Dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962.
- **Persoalan:** seorang tukang pos akan mengantarkan surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan?  
→ menentukan sirkuit Euler di dalam graf

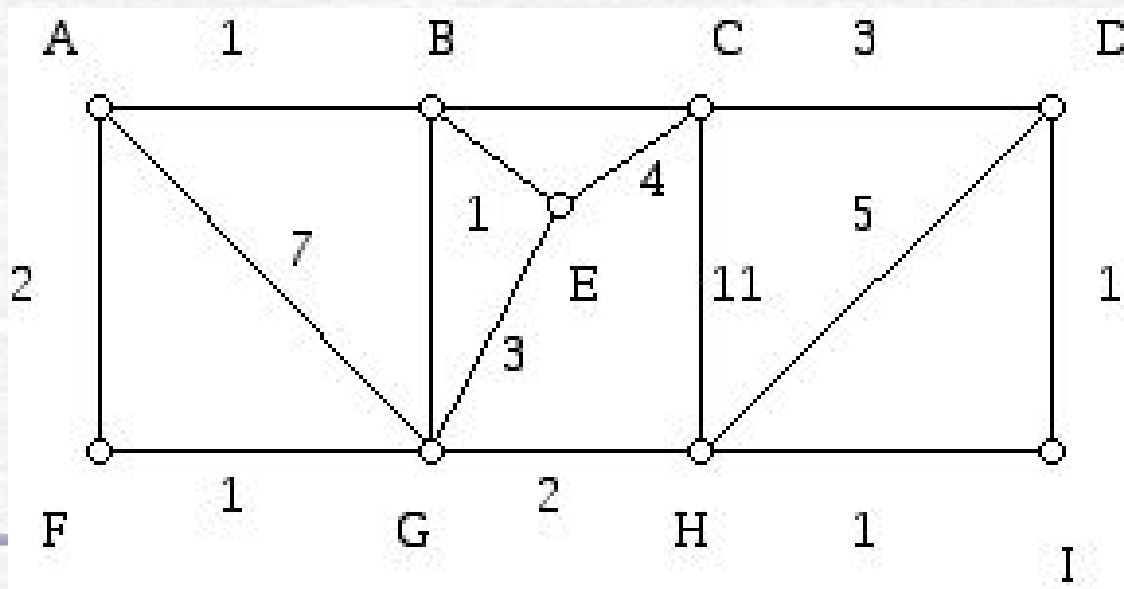


Lintasan yang dilalui tukang pos:  $A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A$ .

- Jika graf yang merepresentasikan persoalan adalah graf Euler, maka sirkuit Eulernya mudah ditemukan.
- Jika grafnya bukan graf Euler, maka beberapa sisi di dalam graf harus dilalui lebih dari sekali.
- Jadi, pak pos harus menemukan sirkuit yang mengunjungi setiap jalan *paling sedikit sekali* dan mempunyai *jarak terpendek*.

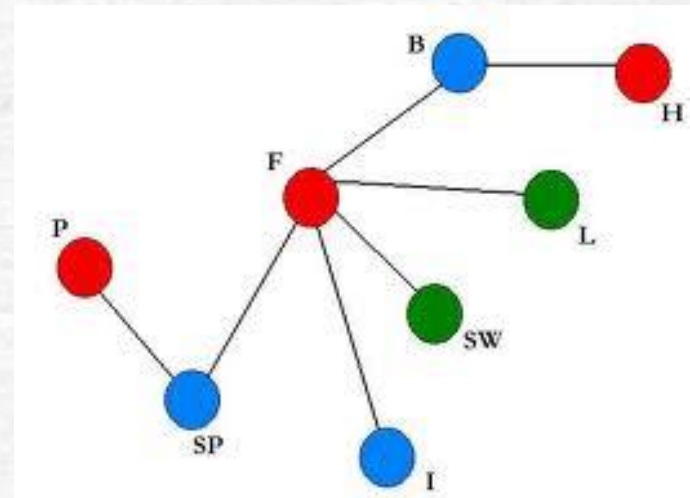
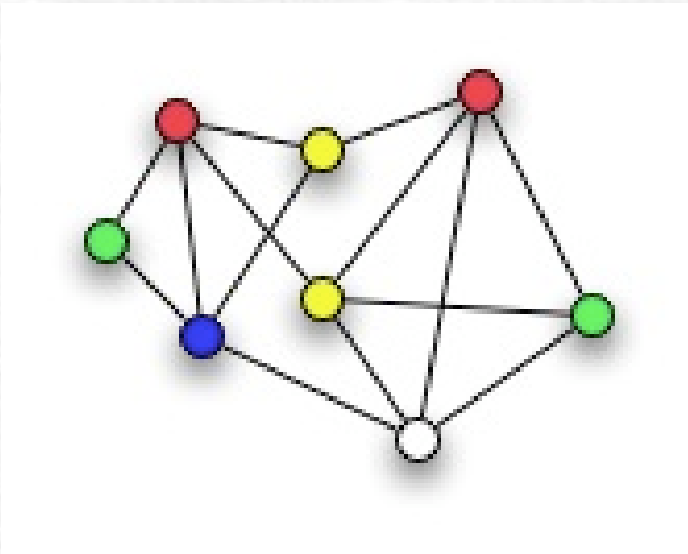
Persoalan tukang pos Cina menjadi:

Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya yang mempunyai jarak terpendek supaya ia melewati setiap jalan paling sedikit sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan?

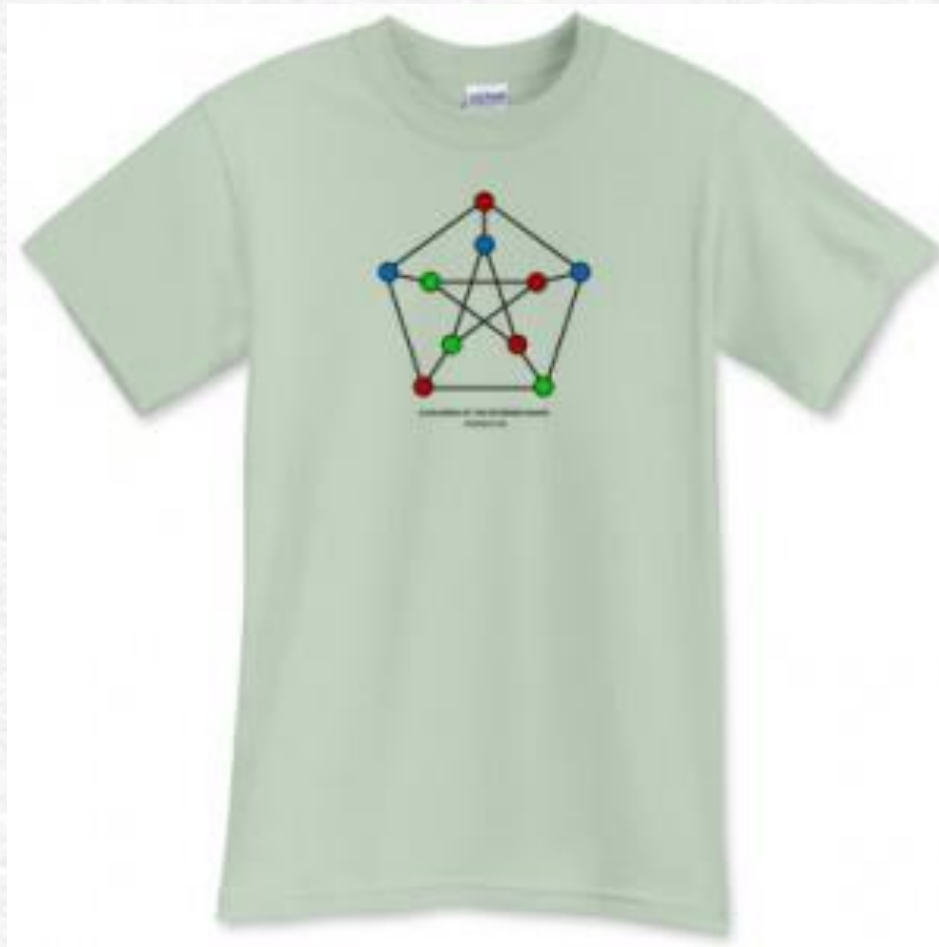


# Pewarnaan Graf

- Ada dua macam: pewarnaan simpul, dan pewarnaan sisi
- Hanya dibahas perwarnaann simpul
- Pewarnaan simpul: memberi warna pada simpul-simpul graf sedemikian sehingga dua simpul bertetangga mempunyai warna berbeda.



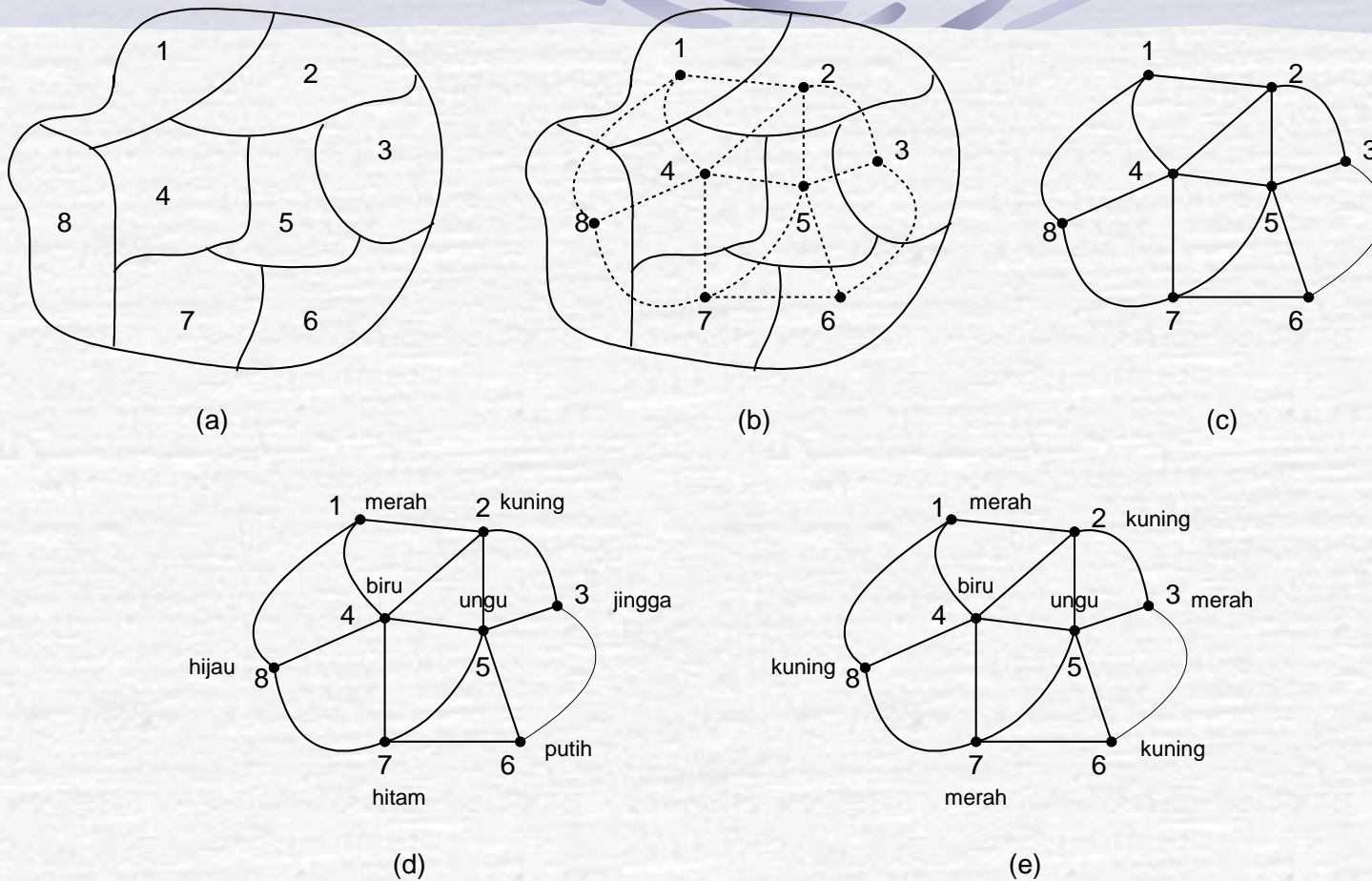




- Aplikasi pewarnaan graf: mewarnai peta.
- Peta terdiri atas sejumlah wilayah.
- Wilayah dapat menyatakan kecamatan, kabupaten, provinsi, atau negara.
- Peta diwarnai sedemikian sehingga dua wilayah bertetangga mempunyai warna berbeda.

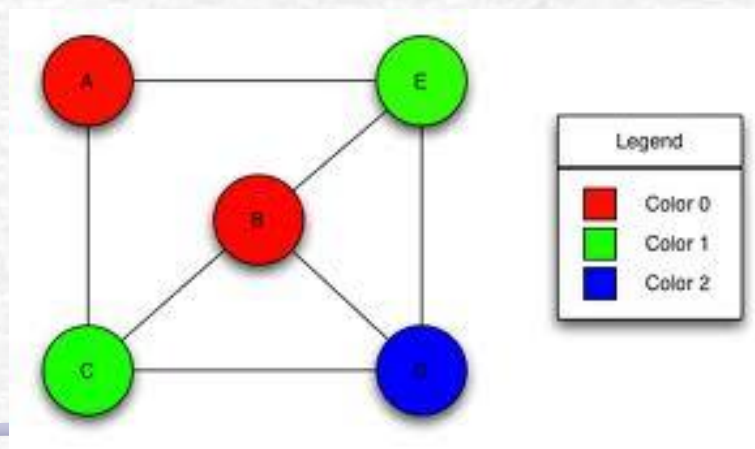


- ☞ Nyatakan wilayah sebagai simpul, dan batas antar dua wilayah bertetangga sebagai sisi.
- ☞ Mewarnai wilayah pada peta berarti mewarnai simpul pada graf yang berkoresponden.
- ☞ Setiap wilayah bertetangga harus mempunyai warna berbeda → warna setiap simpul harus berbeda.

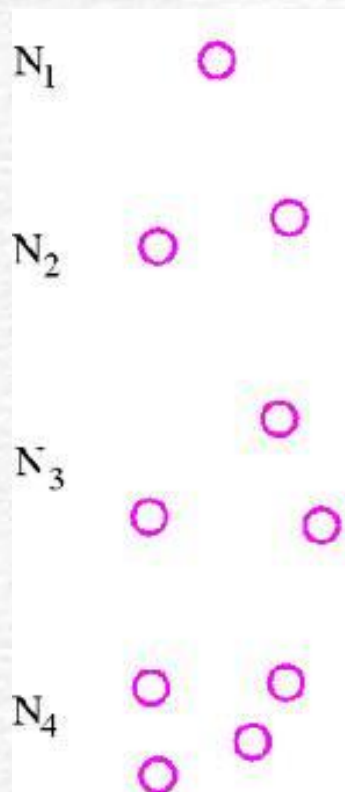


**Gambar 8.72** (a) Peta  
 (b) Peta dan graf yang merepresentasikannya,  
 (c) Graf yang merepresentasikan peta,  
 (d) Pewarnaan simpul, setiap simpul mempunyai warna berbeda,  
 (e) Empat warna sudah cukup untuk mewarnai 8 simpul

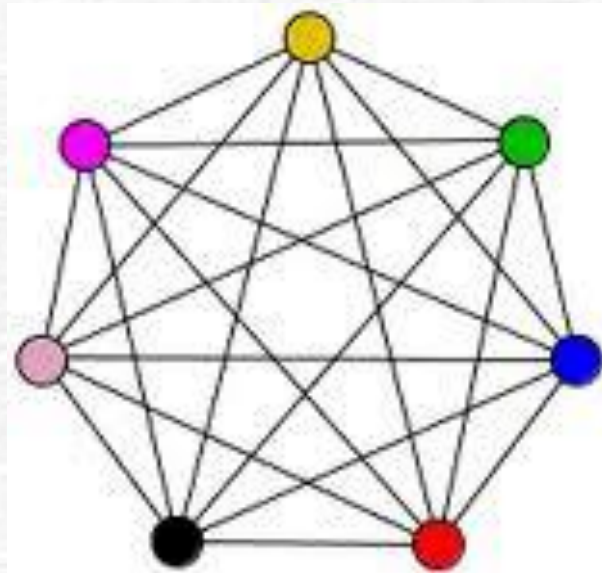
- Bilangan kromatik: jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta.
- Simbol:  $\chi(G)$ .
- Suatu graf  $G$  yang mempunyai bilangan kromatis  $k$  dilambangkan dengan  $\chi(G) = k$ .
- Graf di bawah ini memiliki  $\chi(G) = 3$



- Graf kosong  $N_n$  memiliki  $\chi(G) = 1$ , karena semua simpul tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua simpul cukup dibutuhkan satu warna saja.

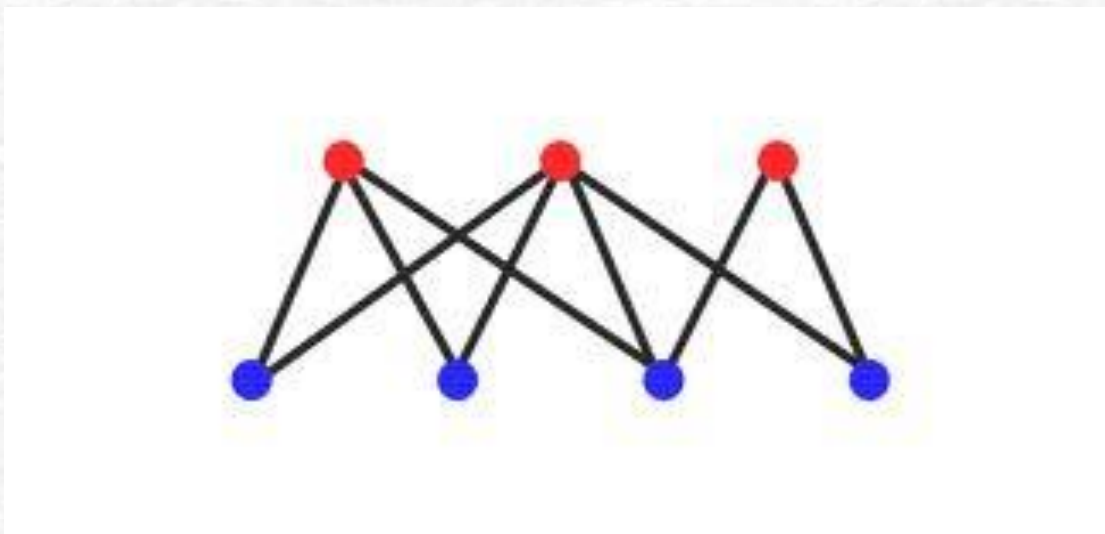


- Graf lengkap  $K_n$  memiliki  $\chi(G) = n$  sebab semua simpul saling terhubung sehingga diperlukan  $n$  buah warna.





- Graf bipartit  $K_{m,n}$  mempunyai  $\chi(G) = 2$ , satu untuk simpul-simpul di himpunan  $V_1$  dan satu lagi untuk simpul-simpul di  $V_2$ .



- Graf lingkaran dengan  $n$  ganjil memiliki  $\chi(G) = 3$ , sedangkan jika  $n$  genap maka  $\chi(G) = 2$ .
- Sembarang pohon  $T$  memiliki  $\chi(T) = 2$ .
- Untuk graf-graf yang lain tidak dapat dinyatakan secara umum bilangan kromatiknya.

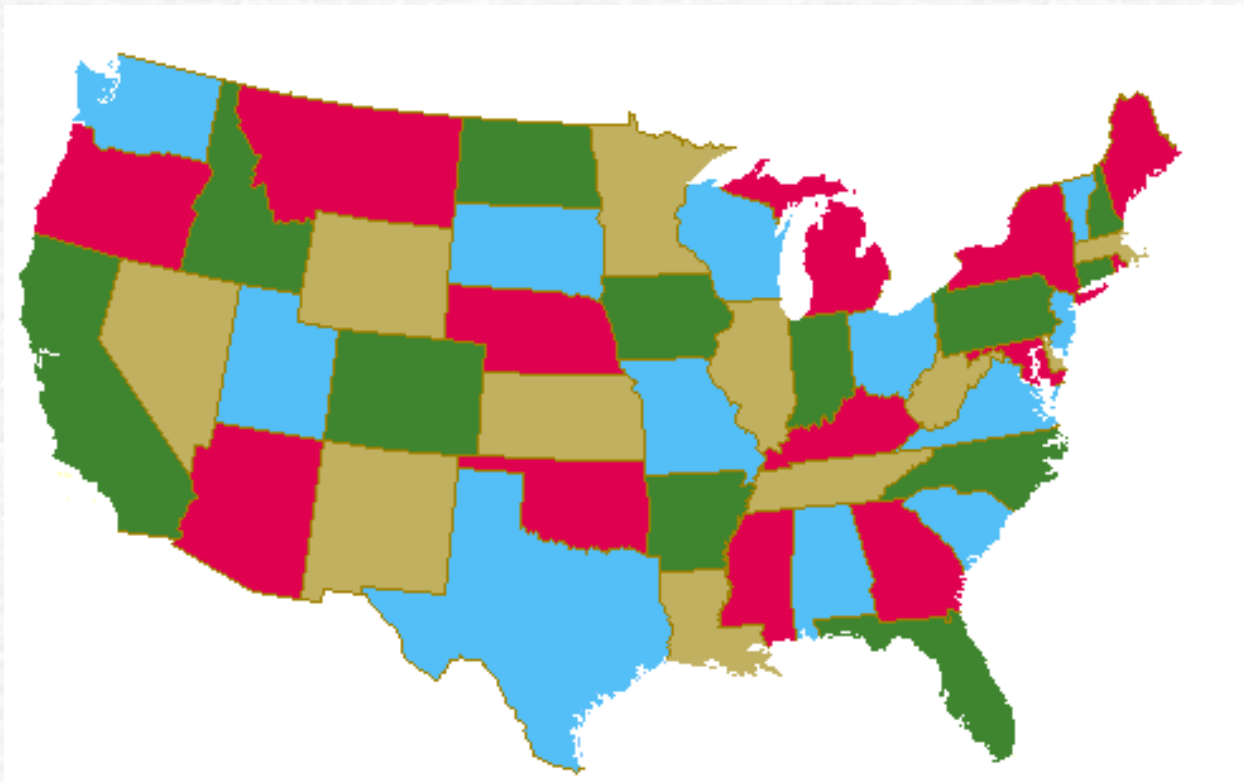
- Perkembangan teorema pewarnaan graf:

**TEOREMA 1.** Bilangan kromatik graf planar  $\leq 6$ .

**TEOREMA 2.** Bilangan kromatik graf planar  $\leq 5$ .

**TEOREMA 3.** Bilangan kromatik graf planar  $\leq 4$ .

- Teorema 4 berhasil menjawab persoalan 4-warna (yang diajukan pada abad 19): dapatkah sembarang graf planar diwarnai hanya dengan 4 warna saja?
- Jawaban dari persoalan ini ditemukan oleh Appel dan Haken yang menggunakan komputer untuk menganalisis hampir 2000 graf yang melibatkan jutaan kasus



Cukup 4 warna saja untuk mewarnai sembarang peta

## ➤ Aplikasi lain pewarnaan graf: penjadwalan.

Misalkan terdapat delapan orang mahasiswa (1, 2, ..., 8) dan lima buah mata kuliah yang dapat dipilihnya ( $A, B, C, D, E$ ). Tabel berikut memperlihatkan matriks lima mata kuliah dan delapan orang mahasiswa. Angka 1 pada elemen  $(i, j)$  berarti mahasiswa  $i$  memilih mata kuliah  $j$ , sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa  $i$  tidak memilih mata kuliah  $j$ .

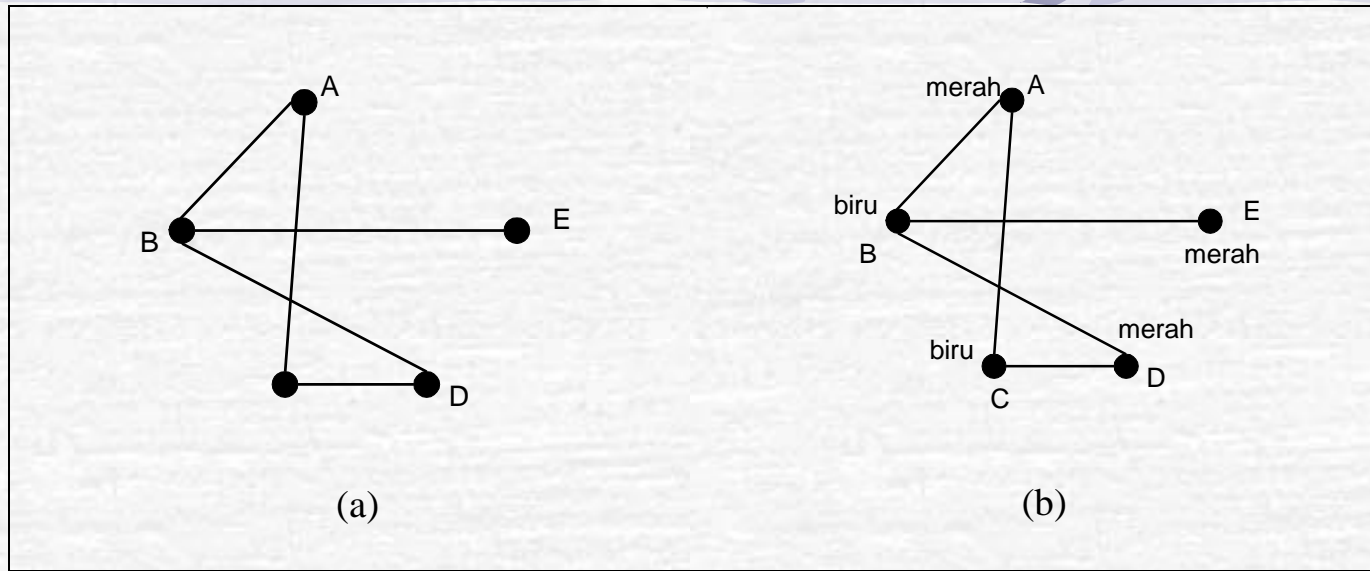
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

Berapa paling sedikit jumlah hari yang dibutuhkan untuk jadwal ujian tersebut sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian mata kuliah yang diambilnya tanpa bertabrakan waktunya dengan jadwal ujian kuliah lain yang juga diambilnya?

Penyelesaian:

simpul  $\rightarrow$  mata kuliah

sisi  $\rightarrow$  ada mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah (2 simpul)



**Gambar 8.74.** (a) Graf persoalan penjadwalan ujian 5 mata kuliah untuk 8 orang mahasiswa  
 (b) Hasil pewaranan pada simpul-simpul graf

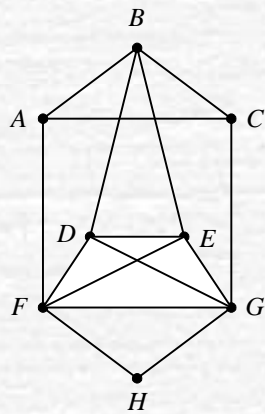
- Bilangan kromatik graf pada Gambar 8.74 adalah 2.
- Jadi, ujian mata kuliah  $A$ ,  $E$ , dan  $D$  dapat dilaksanakan bersamaan, sedangkan ujian mata kuliah  $B$  dan  $C$  dilakukan bersamaan tetapi pada waktu yang berbeda dengan mata kuliah  $A$ ,  $E$ , dan  $D$ .

# Latihan soal

1. Dapatkah kita menggambar graf teratur berderajat 3 dengan 7 buah simpul? Mengapa?
2. Tentukan jumlah simpul pada graf sederhana bila mempunyai 20 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama.
3. Berapa jumlah minimum simpul yang diperlukan agar sebuah graf dengan 6 buah sisi menjadi planar? Ulangi soal yang sama untuk 11 buah sisi.



4. Diberikan gambar sebuah graf  $G$  seperti di bawah ini.



- (a) Tunjukkan dengan ketidaksamaan Euler bahwa graf  $G$  tidak planar.
- (b) Tunjukkan dengan Teorema Kuratowski bahwa graf  $G$  tidak planar.

5. Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul.
  
6. Sebuah departemen mempunyai 6 kelompok kerja yang setiap bulannya masing-masing selalu mengadakan rapat satu kali. Keenam kelompok kerja dengan masing-masing anggotanya adalah:  $K_1 = \{Amir, Budi, Yanti\}$ ,  $K_2 = \{Budi, Hasan, Tommy\}$ ,  $K_3 = \{Amir, Tommy, Yanti\}$ ,  $K_4 = \{Hasan, Tommy, Yanti\}$ ,  $K_5 = \{Amir, Budi\}$ ,  $K_6 = \{Budi, Tommy, Yanti\}$ . Berapa banyak waktu rapat berbeda yang harus direncanakan sehingga tidak ada anggota kelompok kerja yang dijadwalkan rapat pada waktu yang sama. Gambarkan graf yang merepresentasikan persoalan ini lalu (jelaskan sisi menyatakan apa, simpul menyatakan apa) tentukan jumlah waktu rapat ini.

7. Apakah  $K_{13}$  memiliki sirkuit Euler? Sirkuit Hamilton?  
Ulangi pertanyaan yang sama untuk  $K_{14}$
8. Sebuah graf akan dibentuk dari 25 buah sisi. Berapa jumlah maksimum simpul di dalam graf sederhana yang dapat dibuat dari 25 buah sisi tersebut?

1. Ada 8 zat kimia berupa (A, B, ..., H), beberapa diantaranya tidak dapat disimpan bersama-sama di dalam satu ruangan karena campuran uapnya dapat menimbulkan reaksi kimia yang eksplosif, yaitu:

Zat kimia A tidak dapat disimpan bersama-sama dengan C, E, dan H

Zat kimia B tidak dapat disimpan bersama-sama dengan A, D, dan F

Zat kimia C tidak dapat disimpan bersama-sama dengan A, G, dan H

Zat kimia D tidak dapat disimpan bersama-sama dengan B, E, dan H

Zat kimia E tidak dapat disimpan bersama-sama dengan D, A, dan H

Zat kimia F tidak dapat disimpan bersama-sama dengan B, G, dan H

Zat kimia G tidak dapat disimpan bersama-sama dengan C, dan F

Zat kimia H tidak dapat disimpan bersama-sama dengan A, C, D, E, dan F

(a) Gambarkan graf yang merepresentasikan kondisi di atas, jelaskan arti setiap simpul dan sisi. **(5)**

(b) Berapa minimal jumlah ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan zat kimia tersebut? Tuliskan zat-zat kimia apa saja yang bersama-sama ditempatkan pada setiap ruangan. **(10)**